# INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XX. BAND ERSTES HEFT 1952

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

*Preis DM 10.50*

Das

# INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das **Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber**

**Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

**Professor** Dr.-Ing. Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig,** Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor **K. v. Sanden,** Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

**Heidelberg**
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40 u. 54 30

**Berlin W 35**
Reichpietschufer 20
Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

**Vertriebsvertretung im Ausland:**
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

## Inhalt:

Seite

*Eschler, H.*, Über freie Biegungsschwingungen des axial belasteten Stabes mit innerer und äußerer Dämpfung ..... 1

*Nickel, K.*, Zusatz zu J. Dörr: Strenge Lösung der Integralgleichung für ein Flügelgitter ..... 6

*Jung, H.*, Druckverteilung unter elastisch gelagerten Kreisplatten. Mit 2 Textabbildungen ..... 8

*Söhngen, H.*, Durchgang einer Potentialstörung durch einen Leitschaufelkranz. Mit 2 Textabbildungen ..... 13

*Matz, G.*, Vergleich zweier Verfahren zur Ermittlung der spezifischen Oberfläche des Mahlgutes. Mit 1 Textabbildung ..... 19

*Trienes, H.*, u. *E. Truckenbrodt*, Systematische Abwindmessungen an Pfeilflügeln. Mit 12 Textabbildungen ..... 26

*Szablewski, W.*, Turbulente Strömungen in konvergenten Kanälen. Mit 6 Textabbildungen ..... 37

*Melan, E.*, Wärmespannungen in einer Scheibe infolge einer wandernden Wärmequelle. Mit 1 Textabbildung ..... 46

*Ziegler, H.*, Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. Mit 5 Textabbildungen ..... 49

*Müller, W.*, Bewegung des langgestreckten Rotationskörpers in einer zur Längsachse geneigten Richtung. Mit 6 Textabbildungen ..... 57

INGENIEUR-ARCHIV

XX. BAND ERSTES HEFT 1952

# Über freie Biegungsschwingungen des axial belasteten Stabes mit innerer und äußerer Dämpfung.

Von H. Eschler.

**1. Aufgabenstellung.** Das Problem der freien Biegungsschwingungen eines Stabes mit innerer Dämpfung wurde von *K. Muto*[1] und *K. Sezawa*[2] behandelt. Beide Verfasser legten ihren Untersuchungen im Anschluß an *E. J. Routh*[3] die Annahme zugrunde, daß sich die Dämpfungsspannung in der Form

$$\sigma_d = E r_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{1}$$

ausdrücken läßt, wobei $E$ den Elastizitätsmodul, $r_i$ den Koeffizienten der inneren Reibung, der eine reine Materialkonstante ist[4], und $\partial\varepsilon/\partial t$ die Deformationsgeschwindigkeit bedeuten.

Der *Routh*sche Ansatz wurde von *R. Giovannozzi*[5] anläßlich der Untersuchung von erzwungenen Stabschwingungen etwas modifiziert. Wenn $\omega$ die Kreisfrequenz der pulsierenden äußeren Kraft und damit also auch der erzwungenen Schwingungen ist, wird für die Dämpfungsspannung

$$\sigma_d = E \frac{k}{\omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{2}$$

angenommen. Der Koeffizient $k$ hängt außer von der chemischen Zusammensetzung des Werkstoffes auch von der Schwingweite der Deformation, der Temperatur des Stabes und unter Umständen von der Frequenz ab. Bei der Integration der Differentialgleichung hat *Giovannozzi* für $k$ einen konstanten mittleren Wert gesetzt. Wenn man den Ansatz (2) auch bei den freien Biegungsschwingungen von Stäben benutzen will, so wird $\omega$ offenbar als die noch unbekannte Kreisfrequenz der jeweils betrachteten Eigenschwingung aufzufassen sein.

Wie man zwei experimentellen Arbeiten von *Giovannozzi*[6] entnehmen kann, ist der Ansatz (2) allgemein anwendbar, während (1) anscheinend nur bei kleinen Schwingweiten angenähert gilt. Um im folgenden die Verwendung beider Ansätze zu ermöglichen, schreiben wir

$$\sigma_d = E K \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}; \tag{3}$$

mit $K = r_i$ geht (3) in (1) und mit $K = k/\omega$ in (2) über.

Zur Berechnung des Gliedes, um welches die Differentialgleichung der Biegungsschwingungen des Stabes bei Berücksichtigung der inneren Dämpfung zu vermehren ist, bedenken wir, daß für die Dehnung $\varepsilon$ und die Spannung $\sigma$ im Abstand $z$ von der Nullinie die Beziehungen

$$\varepsilon = -z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \sigma = z \frac{M}{J}$$

gelten, wenn mit $y(t, x)$ die Auslenkung der Stabachse zur Zeit $t$ an der Stelle $x$, mit $M$ das Biegungsmoment und mit $J$ das Trägheitsmoment des Querschnittes bezeichnet wird. Durch Einsetzen in (3) ergibt sich das durch die innere Dämpfung hervorgerufene Moment

$$M_d = -EJK \frac{\partial^3 y}{\partial t \, \partial x^2},$$

aus welchem der die innere Dämpfung berücksichtigende Term in der Differentialgleichung durch zweimalige Differentiation nach $x$ folgt.

---

[1] *K. Muto*, Z. angew. Math. Mech. 10 (1930) S. 346.
[2] *K. Sezawa*, Z. angew. Math. Mech. 12 (1932) S. 275.
[3] *E. J. Routh*, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. II, S. 491. Leipzig 1898.
[4] Werte von $\xi = E r_i$ für einige Werkstoffe finden sich in der unter Fußnote 2 zitierten Arbeit auf S. 279.
[5] *R. Giovannozzi*, Aerotecnica 17 (1937) S. 1047.
[6] *R. Giovannozzi*, Aerotecnica 18 (1938) und 19 (1939) S. 245.

Die äußere Dämpfung kann proportional der Geschwindigkeit der Stabachse gesetzt werden [1], wobei ein Koeffizient $r_a$ der Gestalt des Stabes und dem umgebenden Medium Rechnung trägt.

Bei Berücksichtigung der inneren und äußeren Dämpfung sowie der Rotationsträgheit lautet dann die Differentialgleichung der Biegungsschwingungen eines Stabes, der unter dem Einfluß einer axialen Druckkraft $P$ steht,

$$\varrho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + EJK \frac{\partial^5 y}{\partial t \, \partial x^4} + r_a \frac{\partial y}{\partial t} - \varrho J \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \, \partial x^2} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \,. \tag{4}$$

Diese Differentialgleichung ist nur für den auf beiden Enden frei aufliegenden Stab ohne weiteres integrierbar, wobei der den Randbedingungen genügende Ansatz $y = q(t) \sin n\pi x/l$, mit $l$ als Stablänge, die Lösung vermittelt. Bei Vorliegen von anderen Randbedingungen wird die Integration von (4) schwierig. Man überzeugt sich leicht, daß der *Bernoulli*sche Ansatz $y = q(t)\, X(x)$ nur in folgenden Sonderfällen zum Ziel führt:

a) bei Vernachlässigung der inneren und äußeren Dämpfung,
b) bei Vernachlässigung der inneren Dämpfung und Rotationsträgheit,
c) bei fehlender Längskraft und Vernachlässigung der äußeren Dämpfung,
d) bei fehlender Längskraft und Vernachlässigung der Rotationsträgheit.

Dieser Sachverhalt läßt aber anderseits vermuten, daß es auch im allgemeinen Fall sehr angenähert zu stehenden Schwingungen kommt. Eine weitere Stütze für diese Annahme liefert das Experiment. In der Wirklichkeit wird man mit innerer und äußerer Dämpfung sowie mit dem Einfluß der Rotationsträgheit immer rechnen müssen. Obwohl die Differentialgleichung in diesem Fall durch den *Bernoulli*schen Ansatz nicht gelöst werden kann, ergibt der Versuch doch praktisch stehende Schwingungen. Zur Auffindung einer Näherungslösung im allgemeinen Fall kann daher gewiß ein Produktansatz

$$y_n = q_n(t)\, X_n(x) \tag{5}$$

für die $n$-te Eigenschwingung verwendet werden.

In erster Linie werden die Eigenschwingungszahlen und Dämpfungsexponenten interessieren. Solange Reibungskräfte nicht berücksichtigt werden, ermöglicht bekanntlich das *Rayleigh*sche Verfahren, welches sich darauf gründet, daß in der Energiegleichung die Eigenfunktionen durch benachbarte Funktionen ersetzt werden, auf einfache Weise die näherungsweise Berechnung der Eigenschwingungszahlen sowohl des Grundtones als auch der Obertöne. Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie sich auch in unserem Fall eine Näherungslösung auf analoge Art auffinden läßt. Der dabei beschrittene Weg kann als eine Erweiterung des *Rayleigh*schen Verfahrens auf Systeme, die unter der Wirkung von Reibungskräften stehen, bezeichnet werden.

**2. Näherungslösung.** Den Ausgangspunkt für unser Vorhaben bilden die *Lagrange*schen Gleichungen in der erweiterten Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} + \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \,, \tag{6}$$

worin $T$ die kinetische, $U$ die potentielle Energie und $Z$ die Zerstreuungsfunktion, welche gleich der halben Arbeit der Reibungskräfte je Zeiteinheit zu setzen ist, bedeuten. Die der Gleichung (6) zugrunde liegende Voraussetzung, daß die Reibungskräfte den Geschwindigkeiten direkt proportional sein müssen, ist für die äußere Dämpfung erfüllt und trifft mit dem Ansatz (5) auch für die innere Dämpfung zu, da sich

$$\frac{\partial^5 y_n}{\partial t \, \partial x^4} = \frac{\partial y_n}{\partial t} \frac{X_n^{\mathrm{IV}}}{X_n}$$

ergibt.

Die kinetische Energie mit Berücksichtigung der Rotationsträgheit ist durch den Ausdruck

$$T = \frac{1}{2} \varrho F \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \varrho J \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t \, \partial x}\right)^2 dx$$

gegeben, welcher für die $n$-te Eigenschwingung mit (5) übergeht in

$$T = \frac{1}{2} \varrho F \dot{q}_n^2 \int_0^l X_n^2 \, dx + \frac{1}{2} \varrho J \dot{q}_n^2 \int_0^l X_n'^2 \, dx \,. \tag{7}$$

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 1.

Vermindert man die Biegungsenergie um die Energie der Zusammendrückung durch die Axialdruckkraft $P$, so ergibt sich die Beziehung für die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

oder für die $n$-te Eigenschwingung

$$U = \frac{1}{2} EJ\, q_n^2 \int_0^l X_n''^2\, dx - \frac{1}{2} P\, q_n^2 \int_0^l X_n'^2\, dx\,. \tag{8}$$

Die Zerstreuungsfunktion $Z$ setzt sich aus den Anteilen $Z_i$ für die innere und $Z_a$ für die äußere Dämpfung zusammen. Um die Beziehung für $Z_i$ zu finden, bedenken wir, daß die von der Normalspannung $\sigma$ am Einheitswürfel bei einer Vergrößerung der Dehnung $\varepsilon$ auf $\varepsilon + \delta\varepsilon$ geleistete Arbeit $\sigma\delta\varepsilon$ beträgt. Dann ergibt sich mit $dV$ als Volumelement nach obiger Definition für die Zerstreuungsfunktion

$$Z_i = \frac{1}{2} \int\int\int \sigma_d \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\, dV\,.$$

Setzt man den Ausdruck für die Dämpfungsspannung (3) ein, so folgt mit Hilfe der schon früher benutzten Beziehung $\varepsilon = -z\, \partial^2 y/\partial x^2$ sowie wegen $\iint z^2 dF = J$ weiter

$$Z_i = \frac{1}{2} EJK \int_0^l \left(\frac{\partial^3 y}{\partial t\, \partial x^2}\right)^2 dx,$$

woraus man nach Einsetzen von (5)

$$Z_i = \frac{1}{2} EJK\, \dot{q}_n^2 \int_0^l X_n''^2\, dx \tag{9}$$

erhält.

Für den Anteil $Z_a$ ergibt sich, da vom Längenelement $dx$ des Stabes längs des Weges $\delta y$ die Reibungsarbeit $r_a\, \partial y/\partial t\, dx\, \delta y$ zu leisten ist, definitionsgemäß

$$Z_a = \frac{1}{2} r_a \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx,$$

und für die $n$-te Eigenschwingung wird daraus

$$Z_a = \frac{1}{2} r_a\, \dot{q}_n^2 \int_0^l X_n^2\, dx. \tag{10}$$

Einführen von (7), (8), (9) und (10) in die *Lagrange*sche Gleichung (6) liefert dann mit den Abkürzungen

$$S_0 = \int_0^l X_n^2\, dx, \qquad S_1 = \int_0^l X_n'^2\, dx, \qquad S_2 = \int_0^l X_n''^2 dx \tag{11}$$

für $q_n$ die Differentialgleichung

$$\varrho\,(FS_0 + JS_1)\, \ddot{q}_n + (EJKS_2 + r_a S_0)\, \dot{q}_n + (EJS_2 - PS_1)\, q_n = 0.$$

Vermittels des Ansatzes $q_n = e^{(-\delta_n + i\omega_n)t}$ ergeben sich daraus für die Eigenfrequenzen $\omega_n$ und die Dämpfungsexponenten $\delta_n$ die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{EJS_2 - PS_1}{\varrho\,(FS_0 + JS_1)} - \left(\frac{EJKS_2 + r_a S_0}{2\,\varrho\,(FS_0 + JS_1)}\right)^2, \\ \delta_n &= \frac{EJKS_2 + r_a S_0}{2\,\varrho\,(FS_0 + JS_1)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \end{aligned}\right| \tag{12}$$

Bei Verwendung des Ansatzes (2) ist zu beachten, daß $K$ noch Funktion von $\omega_n$ ist.

Diese Formeln ermöglichen nun tatsächlich die näherungsweise Berechnung der Eigenschwingungszahlen $\omega_n$ und der Größen $\delta_n$ in denjenigen Fällen, in welchen die strenge Lösung der Diffe-

rentialgleichung (4) nicht angegeben werden kann. Man braucht nur, analog wie beim *Rayleigh*schen Verfahren, in den Integralen (11) die Schwingungsformen des Stabes durch benachbarte Funktionen zu ersetzen. Das Verfahren, das sich übrigens auch ohne weiteres bei anderen Randwertproblemen der Elastokinetik, wie z.B. der schwingenden Platte, anwenden läßt, soll an Hand eines Beispieles noch näher erläutert werden.

Zuvor wollen wir noch kurz auf den beiderseits frei aufliegenden Stab zurückkommen. Mit den Eigenfunktionen $X_n = \sin n\pi x/l$ lassen sich die Integrale (11) leicht berechnen und aus (12) folgt

$$\omega_n^2 = \frac{n^2\pi^2(n^2\pi^2 EJ - l^2 P)}{\varrho\, l^2 (l^2 F + n^2\pi^2 J)} - \left(\frac{n^4\pi^4 EJK + r_a l^4}{2\,\varrho\, l^2 (l^2 F + n^2\pi^2 J)}\right)^2,$$

$$\delta_n = \frac{n^4\pi^4 EJK + r_a l^4}{2\,\varrho\, l^2 (l^2 F + n^2\pi^2 J)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dieses Ergebnis, das mit dem Ansatz $y_n = e^{(-\delta_n + i\omega_n)t} \sin n\pi x/l$ auch unmittelbar aus der Differentialgleichung (4) erhalten werden kann, stellt in diesem Sonderfall schon die strenge Lösung dar.

Für $K = r_a = 0$ vereinfacht sich (12) auf

$$\omega_n^2 = \frac{EJS_2 - PS_1}{\varrho\,(FS_0 + JS_1)},$$

eine Beziehung, die auch aus der Energiegleichung folgt und den Ausgangspunkt für das *Rayleigh*sche Verfahren bildet.

**3. Beispiel.** Wir behandeln als Beispiel für das angegebene Näherungsverfahren den an beiden Enden eingespannten Stab. Als benachbarte Funktionen $X_n$ können die Eigenfunktionen des Stabes bei vernachlässigter Rotationsträgheit und fehlender Längskraft verwendet werden. Es sind dies die Integrale der Differentialgleichung

$$EJ\frac{d^4X}{dx^4} - \lambda^2\varrho F X = 0,$$

welche aus (4) mit dem *Bernoulli*schen Ansatz leicht erhalten wird. Bemerkenswerterweise besitzt nämlich der rotationsträgheitsfreie, axial unbelastete Stab mit und ohne Berücksichtigung der inneren sowie äußeren Dämpfung die gleichen Eigenfunktionen.

Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man die symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungen gesondert betrachtet. Die Funktionen $X_n$ für die ersteren lauten im Falle eines bei $x = 0$ und $x = l$ eingespannten Stabes

$$X_n = \mathfrak{Cof}\frac{\varphi_n l}{2}\cos\varphi_n\left(x - \frac{l}{2}\right) - \cos\frac{\varphi_n l}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\varphi_n\left(x - \frac{l}{2}\right), \tag{13}$$

worin die $\varphi_n l$ aus $\operatorname{tg}\frac{\varphi_n l}{2} + \mathfrak{Tg}\frac{\varphi_n l}{2} = 0$ zu bestimmen sind. Für die antisymmetrischen Schwingungen gilt

$$X_n = \mathfrak{Sin}\frac{\varphi_n l}{2}\sin\varphi_n\left(x - \frac{l}{2}\right) - \sin\frac{\varphi_n l}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\varphi_n\left(x - \frac{l}{2}\right) \tag{14}$$

mit der Periodengleichung $\operatorname{tg}\frac{\varphi_n l}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{\varphi_n l}{2} = 0$.

Setzt man (13) bzw. (14) in die Integrale (11) ein, so ergibt sich für die symmetrischen Schwingungen

$$S_0 = l\cos^2\frac{\varphi_n l}{2}\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\varphi_n l}{2},$$

$$S_1 = \varphi_n\left[\frac{\varphi_n l}{2}\left(\mathfrak{Cof}^2\frac{\varphi_n l}{2} - \cos^2\frac{\varphi_n l}{2}\right) + 2\sin\frac{\varphi_n l}{2}\cos\frac{\varphi_n l}{2}\,\mathfrak{Cof}^2\frac{\varphi_n l}{2}\right]$$

und für die antisymmetrischen Schwingungen

$$S_0 = l\sin^2\frac{\varphi_n l}{2}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\varphi_n l}{2},$$

$$S_1 = \varphi_n\left[\frac{\varphi_n l}{2}\left(\mathfrak{Sin}^2\frac{\varphi_n l}{2} + \sin^2\frac{\varphi_n l}{2}\right) - 2\sin\frac{\varphi_n l}{2}\cos\frac{\varphi_n l}{2}\,\mathfrak{Sin}^2\frac{\varphi_n l}{2}\right],$$

während für beide Schwingungsformen

$$S_2 = \varphi_n^4 S_0$$

ist. Einsetzen dieser Ausdrücke in (12) liefert mit Benutzung der Periodengleichungen die gesuchten Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{(\varphi_n l)^4 EJ - \Phi_n l^2 P}{\varrho l^2 (l^2 F + \Phi_n J)} - \left(\frac{(\varphi_n l)^4 EJK + r_a l^4}{2\varrho l^2 (l^2 F + \Phi_n J)}\right)^2, \\ \delta_n &= \frac{(\varphi_n l)^4 EJK + r_a l^4}{2\varrho l^2 (l^2 F + \Phi_n J)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \end{aligned}\right| \tag{15}$$

worin zur Abkürzung geschrieben wurde

$$\Phi_n = \begin{cases} \varphi_n l \mathfrak{Tg} \dfrac{\varphi_n l}{2} \left(\varphi_n l \mathfrak{Tg} \dfrac{\varphi_n l}{2} - 2\right) \text{ für die symmetrischen Schwingungen,} \\ \varphi_n l \mathfrak{Ctg} \dfrac{\varphi_n l}{2} \left(\varphi_n l \mathfrak{Ctg} \dfrac{\varphi_n l}{2} - 2\right) \text{ für die antisymmetrischen Schwingungen.} \end{cases}$$

In der folgenden Tabelle sind die ersten fünf Werte von $\varphi_n l$ und $\Phi_n$ zusammengestellt. Für die symmetrischen Schwingungen ist $n$ ungerade, für die antisymmetrischen gerade.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_n l$ | 4,73004 | 7,85320 | 10,99561 | $\approx 4{,}5\,\pi$ | $\approx 5{,}5\,\pi$ |
| $\Phi_n$ | 12,303 | 46,050 | 98,906 | 171,585 | 263,998 |

Vernachlässigt man die äußere Dämpfung, so ergibt sich aus (15) für die Grundschwingung

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{500{,}6\,EJ - 12{,}30\,l^2 P}{\varrho l^2 (l^2 F + 12{,}30\,J)} - \left(\frac{500{,}6\,EJK}{2\varrho l^2 (l^2 F + 12{,}30\,J)}\right)^2, \\ \delta_1 &= \frac{500{,}6\,EJK}{2\varrho l^2 (l^2 F + 12{,}30\,J)}. \end{aligned}\right| \tag{16}$$

Dieses Ergebnis läßt sich anhand der zitierten Arbeit von *Sezawa* kontrollieren. Dort wurde die Differentialgleichung näherungsweise für den Grundton integriert, wobei sich also auf einem Weg, der von dem hier eingeschlagenen grundsätzlich abweicht, für die Eigenwerte $\omega_1$ und $\delta_1$ in unserer Schreibweise die Beziehung[1]

$$-\delta_1 + i\omega_1 = -\frac{500\,EJr_i}{2\varrho l^2 (l^2 F + 12{,}74\,J)} + i\sqrt{\frac{500\,EJ - 12{,}74\,l^2 P}{\varrho l^2 (l^2 F + 12{,}74\,J)} - \left(\frac{500\,EJr_i}{2\varrho l^2 (l^2 F + 12{,}74\,J)}\right)^2}$$

ergab. Der Vergleich mit Formel (16) zeigt, daß beide Beziehungen genau denselben Aufbau besitzen und nur in den Zahlenwerten etwas voneinander abweichen.

**4. Zusammenfassung.** Die strenge Behandlung der Differentialgleichung des frei schwingenden Stabes, welcher unter dem Einfluß einer Längskraft steht, stößt auf Schwierigkeiten, wenn die innere und äußere Dämpfung berücksichtigt wird. Bei Fehlen einer Längskraft, aber Beachtung der Rotationsträgheit und Dämpfung ist es ebenfalls schwierig, die strenge Lösung zu finden. Wie gezeigt wurde, kann eine Näherungslösung für sämtliche Eigenschwingungszahlen und Dämpfungsexponenten auch für den allgemeinen Fall, nämlich bei Vorhandensein einer Längskraft und Berücksichtigung der Dämpfung sowie Rotationsträgheit, gefunden werden, wenn man nicht von der Differentialgleichung sondern von den *Lagrange*schen Gleichungen ausgeht, wobei durch Hinzunahme eines Gliedes, der Zerstreuungsfunktion, der Dämpfung Rechnung getragen wird. In den Ausdrücken für die kinetische und potentielle Energie sowie die Zerstreuungsfunktion wurden die unbekannten Schwingungsformen des Stabes durch benachbarte Funktionen ersetzt. Die Methode kann demnach als eine Erweiterung des *Rayleigh*schen Verfahrens auf Systeme, die unter Wirkung von Reibungskräften stehen, angesehen werden.

(Eingegangen am 12. Mai 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. habil. *H. Eschler*, Töging am Inn, Hauptstraße 81.

[1] Vgl. Fußnote 2 von S. 1; ebendort S. 277, Gleichung (24).

# Zusatz zu J. Dörr: Strenge Lösung der Integralgleichung für ein Flügelgitter.

Von **K. Nickel.**

In seiner kürzlich hier erschienenen Arbeit[1] betrachtet Herr *Dörr* die Integralgleichung[2]

$$w(x) = \frac{1}{2h} \int_{-1}^{1} \Gamma(\xi) \operatorname{Ctg} \frac{\pi}{h} (x - \xi)\, d\xi \tag{1}$$

und zeigt, daß ihre allgemeine Lösung die folgende Gestalt besitzt:

$$\Gamma(\xi) = \frac{k \operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} \operatorname{Cos} \frac{\pi}{h} \xi}{\pi \sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} \xi}} + \frac{2}{h \sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} \xi}} \int_{-1}^{1} w(x) \frac{\sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} x}}{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (x - \xi)}\, dx. \tag{2}$$

Dabei ist $k$ eine beliebige Konstante. Bei der Anwendung von (1) auf die Strömung durch ein Flügelgitter interessiert vor allem diejenige Lösung $\Gamma(\xi)$ von (1), die an der Stelle $\xi = 1$ verschwindet (Abströmbedingung). In der angeführten Arbeit wird darüber nur gesagt, daß man durch passende Wahl von $k$ erreichen könne, daß $\Gamma(1) = 0$ wird. Dies soll im folgenden allgemein durchgeführt werden, weiter werde noch eine Formel für den „Gesamtauftrieb" $\int_{-1}^{1} \Gamma(\xi)\, d\xi$ angegeben.

Es gelten die Formeln

$$\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} x = \operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 + x) \operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 - x) \tag{3}$$

und

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} \frac{\pi}{h} (x - \xi)} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 - \xi)}{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 - x)} - \frac{\operatorname{Cos} \frac{\pi}{h} (1 - \xi)}{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 - x)} \operatorname{Tg} \frac{\pi}{h} (x - \xi). \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) ergibt sich

$$\Gamma(\xi) = \left. \begin{aligned} &\frac{k h}{\pi} \operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} \operatorname{Cos} \frac{\pi}{h} \xi - 2 \operatorname{Cos} \frac{\pi}{h} (1 - \xi) \int_{-1}^{1} w(x) \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 + x)}{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 - x)}}\, dx \\ &\qquad h \sqrt{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 + \xi) \operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 - \xi)} \\ &+ \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 - \xi)}{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 + \xi)}} \int_{-1}^{1} w(x) \operatorname{Ctg} \frac{\pi}{h} (x - \xi) \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 + x)}{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} (1 - x)}}\, dx . \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Es läßt sich nun zeigen, daß im allgemeinen[3] das Integral im letzten Summanden von (5) für $\xi \to 1$ endlich bleibt. Da dieser Summand damit bei $\xi = 1$ verschwindet, erhält man aus der

[1] *J. Dörr*, Ing.-Arch. 19 (1951) S. 66.

[2] Die hier und im folgenden auftretenden uneigentlichen Integrale sind als *Cauchy*sche Hauptwerte aufzufassen.

[3] Z. B. für alle stückweise stetigen Funktionen $w(x)$.

Bedingung $\Gamma(1) = 0$ für $k$ die Bestimmungsgleichung:

$$k = \frac{2\pi}{h \operatorname{Sin}\frac{\pi}{h} \operatorname{Cof}\frac{\pi}{h}} \int_{-1}^{1} w(x) \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(1+x)}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(1-x)}}\, dx. \tag{6}$$

Setzt man (6) in (5) ein, so kommt schließlich die gesuchte Gleichung:

$$\Gamma(\xi) = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(1-\xi)}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(1+\xi)}} \int_{-1}^{1} w(x) \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(1+x)}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(1-x)}} \left[\operatorname{Ctg}\frac{\pi}{h}(x-\xi) - \operatorname{Tg}\frac{\pi}{h}\right] dx. \tag{7}$$

Für manche Zwecke ist es noch von Vorteil, einen geschlossenen Ausdruck für den „Gesamtauftrieb" $A = \int_{-1}^{1} \Gamma(\xi)\, d\xi$ zu kennen. Bildet man $A$ nach (7) und vertauscht die Integrationsreihenfolge, so läßt sich das innere Integral elementar berechnen. Man findet so

$$A = \int_{-1}^{1} \Gamma(\xi)\, d\xi = \frac{2}{\operatorname{Cof}\frac{\pi}{h}} \int_{-1}^{1} w(x) \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(1+x)}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(1-x)}}\, dx. \tag{8}$$

Wendet man diese Rechnungen auf Flügelgitter an, so bedeutet $\Gamma(\xi)$ die Zirkulationsverteilung über die Flügeltiefe, $w(x)$ die an der Stelle $x$ eines Profils induzierte Abwindgeschwindigkeit, während durch $h$ die geometrische Gestalt des Gitters bestimmt wird (vgl. die Arbeit *Dörrs*). Wie auch in der Arbeit von *Dörr* bemerkt wird, ist $\Gamma(\xi)$ bei reellem $w(x)$ nur dann reell, wenn $h$ reell oder rein imaginär ist, entsprechend einem Staffelwinkel des betrachteten Flügelgitters von 0 oder 90°. Analog zu den Rechnungen von *Birnbaum*[1] kann man dann in diesen beiden Fällen $w(x)$ durch die Profilkontur des Flügelgitters bestimmen. Z. B. entspricht $w(x) = \text{const}$ einem Gitter aus ebenen Platten. Für $w(x) \equiv 1$ findet man aus (7) und (8) das bekannte[2] Ergebnis

$$\Gamma(\xi) = \frac{2}{\operatorname{Cof}\frac{\pi}{h}} \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(1-\xi)}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(1+\xi)}}, \qquad A = 2h \operatorname{Tg}\frac{\pi}{h}.$$

(Eingegangen am 8. Mai 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Karl Nickel*, Instituto Aerotecnico Córdoba, Argentina.

[1] *W. Birnbaum*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 290ff.

[2] Vgl. mit etwas anderen Bezeichnungen *R. Grammel*, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, S. 93—97. Braunschweig 1917.

# Druckverteilung unter elastisch gelagerten Kreisplatten.

Von H. Jung.

**1. Einleitung.** Eine elastisch isotrope Kreisplatte liege auf einem elastisch isotropen Halbraum auf. Wird die Kreisplatte durch eine rotationssymmetrische Belastung beansprucht, so ergibt sich eine Druckverteilung zwischen Platte und Halbraum. Die Druckverteilung hängt von der Art der Belastung, der Plattensteifigkeit und den Elastizitätskonstanten des Halbraumes ab. Zur Vereinfachung der Rechnung wurde bisher[1] angenommen, daß die Platte in ihrer gesamten Ausdehnung auf dem Halbraum aufliegt. *Nemény*i[2] hat darauf hingewiesen, daß sich die Platte vom Halbraum abheben kann, wenn die Belastung, die Plattensteifigkeit und die Elastizitätskonstanten vorgegeben sind.

Es soll nun gezeigt werden, wie dieses von *Nemény*i gestellte Problem gelöst werden kann. In Ziff. 2 wird das allgemeine Verfahren angegeben. An einem Beispiel soll dann in Ziff. 3 der Rechenaufwand gezeigt werden.

**2. Verfahren zur Ermittlung der Druckverteilung.** Gegeben ist eine Kreisplatte vom Halbmesser $a$ und der Dicke $h$. Die rotationssymmetrische Belastung der Platte werde mit $p_2(r)$ und die Druckverteilung zwischen Platte und Halbraum mit $p_1(r)$ bezeichnet. Es wird nun angenommen, daß die Platte im belasteten Zustand mit der Fläche $r \leq a$ auf dem Halbraum aufliege. Ferner macht man noch die Annahme $h \ll a$, so daß die technische Plattenbiegungslehre zur Anwendung kommen kann.

Wird der elastische Halbraum $z \geq 0$ durch eine rotationssymmetrische Belastung beansprucht, so ist die Verschiebung der Oberfläche $z = 0$ mit der Abkürzung

$$g_1(\lambda) = \int_0^a p_1(\varrho)\, \varrho\, J_0(\lambda \varrho)\, d\varrho \tag{1}$$

gegeben durch[3]

$$w_1(r) = \frac{m-1}{G\, m} \int_0^\infty g_1(\lambda)\, J_0(\lambda\, r)\, d\lambda\,. \tag{2}$$

Die Druckverteilung zwischen Platte und Halbraum ist

$$p_1(r) = \int_0^\infty g_1(\lambda)\, \lambda\, J_0(\lambda\, r)\, d\lambda\,. \tag{3}$$

Die Durchbiegung der Kreisplatte mit der konstanten Biegesteifigkeit $N$ ist durch die Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w_2 = \frac{1}{N}[p_2(r) - p_1(r)] \tag{4}$$

mit den Randbedingungen

$$r = a : \; q_r(r) = 0\,, \tag{5}$$

$$r = a : \quad m_r = 0 \tag{6}$$

bestimmt, wobei

$\Delta \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$ ist und $q_r$ die Querkraft, $m_r$ das Biegemoment bedeuten. Die Lösung von (4) läßt sich in der Form

$$w_2(r) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \left[ \int_0^a p_2(\varrho)\, \varrho\, J_0(\lambda \varrho)\, d\varrho - \int_0^a p_1(\varrho)\, \varrho\, J_0(\lambda \varrho)\, d\varrho \right. \\ \left. + c_0\, a\, J_0(\lambda a) + c_1\, a \lambda\, J_1(\lambda a) + c_2\, a\, \lambda^2\, J_0(\lambda\, a) + c_3\, a\, \lambda^3\, J_1(\lambda\, a) \right] \frac{1}{\lambda^3}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda \tag{7}$$

---

[1] *F. Schleicher*, Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Berlin 1926.
[2] *P. Nemény*i, Z. angew. Math. Mech. **11**, (1931) S. 450.
[3] *H. Jung*, Ing.-Arch. **18**, (1950) S. 178.

angeben. Das Integral (7) muß die Randbedingungen (5) und (6) erfüllen. Setzt man $c_0 = 0$, so ist die Randbedingung (5) befriedigt. Da $w_2(r)$ eine stückweis stetige und stetig differentiierbare Funktion ist, so muß

$$g_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^4}\left[\int_0^a p_2(\varrho)\,\varrho\,J_0(\lambda\varrho)\,d\varrho - g_1(\lambda) + c_1\,a\,\lambda\,J_1(\lambda a) + c_2\,a\lambda^2\,J_0(\lambda a) + c_3\,a\lambda^3\,J_1(\lambda a)\right]$$

beschränkt und für $0 \leq \lambda \leq \infty$ quadratisch integrierbar sein. Diese Forderung führt auf die Bedingung

$$\lim_{\lambda \to 0} g_2(\lambda) \neq 0\,. \tag{8}$$

Entwickelt man $g_2(\lambda)$ in eine Potenzreihe nach $\lambda$, so müssen sämtliche Glieder mit $\lambda^{-n}$ gleich Null sein. Da $g_2(\lambda)$ eine quadratische Funktion in $\lambda$ ist, erhält man aus (8) zwei Gleichungen, wobei die Glieder mit $\lambda^{-4}$ auf die Gleichgewichtsbedingung führen. Setzt man die Glieder mit $\lambda^{-2}$ gleich Null, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung von $c_2$. Die Randbedingung (6) führt auf eine Gleichung zur Bestimmung von $c_1$.

Macht man nun die Annahme, daß die Platte reibungsfrei auf dem Halbraum aufliegt, so muß

$$w_1(r) = w_2(r) \quad \text{für } r \leq \alpha,$$
$$p_1(r) \equiv 0 \quad \text{für } r > \alpha$$

sein. Dies ergibt die Integralgleichung

$$\left.\begin{aligned}\frac{m-1}{G\,m}\int_0^\infty g_1(\lambda)\,J_0(\lambda\,r)\,d\lambda = \frac{1}{N}\int_0^\infty \Bigg[\int_0^a p_2(\varrho)\,\varrho\,J_0(\lambda\varrho)\,d\varrho - g_1(\lambda) + c_1\,a\lambda\,J_1(\lambda a)\\ + c_2\,a\,\lambda^2\,J_0(\lambda a) + c_3\,a\lambda^3\,J_1(\lambda a)\Bigg]\frac{1}{\lambda^3}\,J_0(\lambda\,r)\,d\lambda\,.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Um diese Integralgleichung zu lösen, macht man für die unbekannte Funktion $g_1(\lambda)$ den Ansatz

$$g_1(\lambda) = \sum_0^\infty A_n\,\lambda^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha\,\lambda)\,. \tag{10}$$

Bestimmt man mit (10) die Druckverteilung zwischen Platte und Halbraum, so wird[1] mit (3)

$$p_1(r) = \sum A_n \int_0^\infty \lambda^{-n+\frac{1}{2}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha\lambda)\,J_0(\lambda r)\,d\lambda = \left\{\begin{array}{ll}\sum A_n \dfrac{(\alpha^2 - r^2)^{n-\frac{1}{2}}}{2^{n-\frac{1}{2}}\,\alpha^{n+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} & (r \leq \alpha)\\ 0 & (r > \alpha)\,.\end{array}\right\} \tag{11}$$

Die Verschiebung $w_1$ der Oberfläche des Halbraumes ergibt sich[2] mit (10) und (2) zu

$$w_1(r) = \frac{m-1}{G\,m}\left\{\begin{array}{ll}\sum A_n \dfrac{\sqrt{\pi}\,\alpha^{n-\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}}\,n!}\,F\left(\frac{1}{2}, -n, 1, \frac{r^2}{\alpha^2}\right) & (r \leq \alpha)\,.\\ \sum A_n \dfrac{\alpha^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+1}\,r\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\,F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \left(n+\frac{3}{2}\right), \frac{\alpha^2}{r^2}\right) & (r > \alpha)\,.\end{array}\right\} \tag{12}$$

Bei der Berechnung von $w_2(r)$ führt die Bedingung (8) auf zwei Gleichungen zur Bestimmung von $A_0$ und $c_2$. Wertet man das Integral (7) mit (10) aus, so erhält man mit

$$\int_0^a p_2(\varrho)\,\varrho\,J_0(\lambda\varrho)\,d\varrho = \sum_1^4 B_n\,\overline{K_n}\left(\lambda, J_n(a\,\lambda)\right)$$

---

[1] *W. Magnus* und *F. Oberhettinger*, Formeln u. Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematik und Physik, S. 51. 2. Auflage Berlin 1948.

[2] Seite 50 von Fußnote 1.

die Durchbiegung der Platte in der Form

$$w_2(r) = \frac{1}{N}\left[\sum_1^i B_n\, K_n(r^2) + \sum_1^\infty A_n\, L_n(r^2) + c_1\, l(r^2) + \bar{c}_3\right]. \tag{13}$$

Setzt man (12) und (13) in (9) ein, so wird für $r \leq \alpha$

$$\frac{m-1}{G\,m}\sum A_n \frac{\sqrt{\pi}\,\alpha^{n-\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}}\,n!} F\left(\frac{1}{2}, -n, 1, \frac{r^2}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{N}\left[\sum_1^i B_n\, K_n(r^2) + \sum_1^\infty A_n\, L_n(r^2) + c_1\, l(r^2) + \bar{c}_3\right]. \tag{14}$$

Verlangt man, daß (14) auf den Kreisen $r = \alpha/\mu$ mit $\mu = 1, 2, 3 \ldots$ erfüllt ist, so erhält man $n+1$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der $A_n$ und $\bar{c}_3$. Die Konstante $c_1$ wird aus der Randbedingung (6) ermittelt.

Unbekannt ist nun noch der Druckkreishalbmesser $\alpha$. Die durch (12) gegebenen Verschiebungen bleiben auf dem Kreis $r = \alpha$ endlich. Es gilt, wie einfach nachgewiesen werden kann,

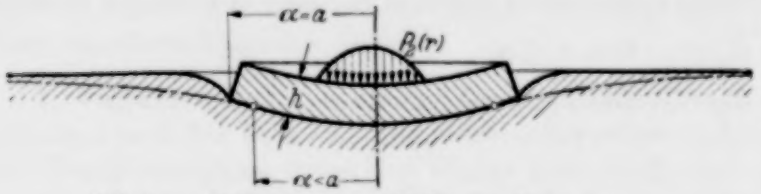


Abb. 1. — Deformation des Halbraums für $\alpha = a$.
—·— Deformation des Halbraums für $\alpha < a$.

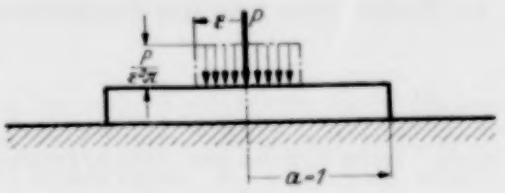


Abb. 2. Platte mit Einzellast.

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\alpha^{n-\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}}\,n!} F\left(\frac{1}{2}, -n, 1, 1\right) = \frac{\alpha^{n-\frac{1}{2}}}{2^{n+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \left(n+\frac{3}{2}\right), 1\right).$$

Bestimmt man $dw_1/dr$ auf dem Kreis $r = \alpha$, so erhält man

$$\left.\frac{dw_1}{dr}\right|_{r=\alpha} = \infty.$$

Eine senkrechte Tangente kann sich aber dann und nur dann ausbilden, wenn $\alpha = a$ ist (Abb. 1). Die Druckverteilung $p_1(r)$ wird dann an der Stelle $r = a$ unendlich. Schließt man diesen Fall aus, so muß, wie einfach gezeigt werden kann,

$$A_0(\alpha) = 0 \tag{15}$$

gefordert werden. Da aus der Gleichgewichtsbedingung $A_0$ als Funktion der $A_n$ und $\alpha$ bestimmt wurde, ist durch (15) eine Bedingung zur Berechnung von $\alpha$ gegeben.

Ergibt sich aus (15) $\alpha > a$, so ist $\alpha = a$ zu setzen. Die Platte drückt sich dann in den Halbraum ein und $A_0$ ist durch die Gleichgewichtsbedingung bestimmt. An einem Beispiel soll der Rechnungsgang noch gezeigt werden.

**3. Platte mit Einzellast im Koordinatenursprung.** Durch Abb. 2 sei der Belastungsfall gegeben. Bei Verwendung eines dreigliedrigen Näherungsansatzes wird

$$g_1(\lambda) = A_0\,\lambda^{-\frac{1}{2}} J_{1/2}(\alpha\lambda) + A_1\,\lambda^{-\frac{3}{2}} J_{3/2}(\alpha\lambda) + A_2\,\lambda^{-\frac{5}{2}} J_{5/2}(\alpha\lambda). \tag{16}$$

Mit (16) geht man in (2) ein und erhält

$$w_1(r) = \frac{m-1}{G\,m}\left[A_0\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} + A_1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{\alpha^2}\right) + A_2\frac{\alpha}{8}\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2} + \frac{3}{8}\frac{r^4}{\alpha^4}\right)\right]. \tag{17}$$

Geht man mit (16) in (7) ein, dann ergibt sich die Durchbiegung der Platte zu

$$\begin{aligned} w_2(r) = \frac{1}{N}\int_0^\infty \Big[ & B_0 - A_0\,\lambda^{-\frac{1}{2}} J_{1/2}(\alpha\lambda) - A_1\,\lambda^{-\frac{3}{2}} J_{3/2}(\alpha\lambda) - A_2\,\lambda^{-\frac{5}{2}} J_{5/2}(\alpha\lambda) \\ & + c_1\,\lambda\, J_1(\lambda) + c_2\,\lambda^2\, J_0(\lambda) + c_3\,\lambda^3\, J_1(\lambda)\Big]\frac{1}{\lambda^3} J_0(\lambda r)\, d\lambda. \end{aligned} \tag{18}$$

In (18) wurde zur Abkürzung gesetzt

$$B_0 = \frac{P}{2\pi} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{P}{\varepsilon^2 \pi} \varrho \, J_0(\lambda \varrho) \, d\varrho \, .$$

Mit der Bedingung (8) erhält man aus (18) die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &B_0 - \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} A_0 - \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{\alpha}{3} A_1 - \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{\alpha^2}{15} A_2 = 0 \, , \\ &\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{\alpha^2}{6} A_0 + \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{\alpha^3}{30} A_1 + \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{\alpha^4}{210} A_2 + \frac{c_1}{2} + c_2 = 0 \, . \end{aligned}\right| \qquad (19)$$

Bestimmt man aus (19) $A_0$ und $c_2$ und geht damit in (18) ein, so läßt sich das Integral auswerten und ergibt

$$w_2(r) = B_0 K_0 + A_1 L_1 + A_2 L_2 + c_1 l_1 + \bar{c}_3 \, , \qquad (20)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde: für $r \leq \alpha$

$$K_0 = \frac{5}{24}(\alpha^2 - r^2) + \frac{r^2}{4} \ln \frac{r}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{6} \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{48\alpha^2}(\alpha^2 - r^2)^2 + \frac{(\alpha^2 - r^2)^3}{3! \cdot 4! \, \alpha^4} - \frac{(\alpha^2 - r^2)^4}{2^5 \cdot 3! \, \alpha^6} + \frac{(\alpha^2 - r^2)^6}{2^5 \cdot 6! \, \alpha^8} - + \cdots ,$$

$$L_1 = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \left[ \frac{\alpha^3}{45} \ln \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{90}(\alpha^2 - r^2) + \frac{1}{180\,\alpha}(\alpha^2 - r^2)^2 + \frac{1}{270 \cdot \alpha^3}(\alpha^2 - r^2)^3 + \frac{1}{40 \cdot 4! \, \alpha^5}(\alpha^2 - r^2)^4 + \cdots \right] ,$$

$$L_2 = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \left[ \frac{2\alpha^4}{15 \cdot 21} \ln \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{15 \cdot 21}(\alpha^2 - r^2) + \frac{1}{30 \cdot 21}(\alpha^2 - r^2)^2 + \frac{1}{45 \cdot 21\,\alpha^2}(\alpha^2 - r^2)^3 - \frac{1}{8 \cdot 21 \cdot 4! \, \alpha^4}(\alpha^2 - r^2)^4 - \cdots \right] ,$$

$$l_1 = \frac{1 - r^2}{4} \, ,$$

dagegen für $r > \alpha$:

$$K_0 = -\frac{\alpha^2}{6} \ln r \, ,$$

$$L_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{\alpha^3}{45} \ln r \, ,$$

$$L_2 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{2\alpha^4}{15 \cdot 21} \ln r \, ,$$

$$l_1 = \frac{1 - r^2}{4} \, .$$

Die Randbedingung $m_r = 0$ für $r = 1$ führt auf

$$c_1 = B_0 \frac{2\alpha^2}{6} \frac{m-1}{m+1} - A_1 \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{2\alpha^3}{45} \frac{m-1}{m+1} - A_2 \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{4\alpha^4}{15 \cdot 21} \frac{m-1}{m+1} \, .$$

Fordert man nun, daß auf den Kreisen $r = \alpha$, $r = \alpha/2$ und im Ursprung $w_1(r) = w_2(r)$ ist, so erhält man mit der Abkürzung

$$\beta = \frac{m-1}{G \cdot m} N$$

die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &B_0 \cdot f_1(\alpha) + A_1 g_1(\alpha) + A_2 h_1(\alpha) - \bar{c}_3 = 0 \, , \\ &B_0 \cdot f_2(\alpha) + A_1 g_2(\alpha) + A_2 h_2(\alpha) - \bar{c}_3 = 0 \, , \\ &B_0 \cdot f_3(\alpha) + A_1 g_3(\alpha) + A_2 h_3(\alpha) - \bar{c}_3 = 0 \, . \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Eliminiert man aus (21) $\bar{c}_3$, so wird in ausführlicher Schreibweise

$$\left.\begin{aligned}
&-B_0\left[\alpha^2\,\frac{109}{12\cdot 48}+\frac{\alpha^4}{12}\,\frac{m-1}{m+1}\right]+A_1\left[\frac{\beta}{4}\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}+\frac{\alpha^3}{45}\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}+\frac{1}{90}\alpha^5\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\,\frac{m-1}{m+1}\right]+\\
&\quad+A_2\left[\frac{5}{64}\alpha\beta\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}+\frac{3{,}4729}{630}\alpha^4\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}+\frac{\alpha^6}{15\cdot 21}\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\,\frac{m-1}{m+1}\right]=0\,,\\
&-B_0\left[\frac{151}{32^2}\alpha^2-\frac{\alpha^2}{16}\ln 2+\frac{\alpha^4}{16}\,\frac{m-1}{m+1}\right]+A_1\left[\frac{5\beta}{48}\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}+\frac{\alpha^3}{90}\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}+\frac{\alpha^5}{120}\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\,\frac{m-1}{m+1}\right]+\\
&\quad+A_2\left[\frac{7\beta}{128}\alpha\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}+\frac{57\alpha^4}{320\cdot 21}\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}+\frac{\alpha^6}{20\cdot 21}\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\,\frac{m-1}{m+1}\right]=0\,.
\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

Streicht man in (22) die Glieder mit $\alpha^3$ und höherer Ordnung, so erhält man die Näherungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
A_1\frac{\beta}{4}\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}+A_2\frac{5}{64}\alpha\beta\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}&=B_0\alpha^2\frac{109}{12\cdot 48}\,,\\
A_1\frac{5\beta}{48}\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}+A_2\frac{7}{128}\alpha\beta\sqrt{\frac{\alpha\pi}{2}}&=B_0\alpha^2\frac{151}{32^2}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{22a}$$

Aus (22a) bestimmt man sich erste Näherungswerte für $A_1$ und $A_2$. Mit diesen $A_1$ und $A_2$ wird in die erste Gleichung aus (19) eingegangen und $A_0(\alpha)$ bestimmt. Mit $A_0(\alpha)=0$ erhält man einen ersten Näherungswert $\alpha_1$. Mit diesem $\alpha_1$ geht man in die Glieder höherer Ordnung von (22) ein und erhält damit verbesserte Gleichungen (22a), aus denen dann auf dem beschriebenen Weg ein neues $\alpha_2$ ermittelt wird. Das Verfahren wird solange durchgeführt, bis sich $\alpha_n$ nicht mehr ändert. Bei der Rechnung ist es nun zweckmäßig, die Plattendicke

$$h=\varkappa\alpha$$

zu setzen, wobei der erste $\varkappa$-Wert geschätzt werden muß. Bei dem vorgegebenen Beispiel ergab sich mit $h=\frac{1}{30}a$ und $a=1$ der Druckkreisradius zu

$$\alpha=\frac{1}{3{,}3166}<1\,.$$

(Eingegangen am 22. Mai 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *H. Jung*, Stuttgart-N., Robert-Mayer-Str. 66.

# Durchgang einer Potentialstörung durch einen Leitschaufelkranz.

Von H. Söhngen.

**1. Aufgabenstellung.** Bei Schwingungsuntersuchungen an laufenden Schaufelkränzen axial durchströmter Maschinen tritt öfters die Frage auf, wie sich eine Störung, die z. B. von einer Stützrippenreihe erzeugt wird, auf einen dahinter bzw. davor befindlichen Laufschaufelkranz auswirkt, wenn zwischen beiden noch ein Leitschaufelkranz liegt. Um diese Frage beantworten zu können, muß man zunächst einmal wissen, in welchem Maße die Störung durch den Leitkranz hindurchdringt. In der Praxis interessieren insbesondere zwei Fälle:

I. Stützrippenreihe vor dem Eintrittsleitrad (Abb. 1), d. h. die Stützrippenreihe liegt in einem Parallelstrom vor einem Beschleunigungsgitter, wobei Stützrippenreihe und Gitterachse zur ankommenden Strömung senkrecht stehen. Unter den unten genannten Voraussetzungen wird gezeigt, daß in diesem Falle die Störung nicht durch den Leitapparat hindurchgeht.

II. Stützrippenreihe hinter dem Austrittsleitrad (Abb. 2), d. h. die Stützrippenreihe liegt hinter einem Verzögerungsgitter und es stehen Stützrippenreihe und Gitterachse senkrecht zum Abstrom. In diesem Fall wirkt sich das Leitgitter ungünstig aus, es verdoppelt die Störung und holt sie um die Tiefe des Leitgitters näher heran.

Beide Fälle werden unter den Voraussetzungen untersucht, daß

1) das strömende Medium inkompressibel und reibungsfrei ist,

2) es sich um eine Potentialstörung (Verdrängungsströmung) handelt,

3) die Teilung $a$ des Leitgitters klein im Vergleich zur Schaufeltiefe $c$ ist, d. h., die Beschränkung auf eine lineare Theorie in $a/c$. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß in dem gesamten Schaufelraum die Strömungsrichtung den Schaufeln parallel ist,

4) die Stützrippenzahl klein im Vergleich zur Blattzahl ist,

5) die Höhe des Ringkanals, in dem der Kranz liegt, klein gegenüber dem Durchmesser ist, man den Strömungsvorgang also in eine Ebene abwickeln kann,

6) die Schaufeln des Gitters einander gleich und dünn sind,

7) die Stützrippenreihe soweit von dem Gitter entfernt ist, daß ihre Anströmung als homogen angesehen werden darf und mithin die Rückinduktion vernachlässigt werden kann,

8) die Stützrippen gleiche und symmetrische Profile haben[1].

**2. Geschwindigkeitsfelder und Randbedingungen.** Wir denken uns den Strömungsvorgang im Ringkanal in eine $(x, y)$-Ebene abgewickelt, und zwar möge dabei die Gittervorderkante mit der $y$-Achse zusammenfallen. Der Nullpunkt werde so gewählt, daß die $x$-Achse Symmetrieachse für eine Stützrippe ist.

Hat der Schaufelkranz den Halbmesser $R$, und ist $\sigma$ die Anzahl der Stützrippen, so hat die Strömung in $y$ die Periode $2\pi R/\sigma$. Es ist daher zweckmäßig, *Fourier*sche Reihen einzuführen. Wir benutzen diese hier in der komplexen Form und schreiben z. B. für die Strömungsgeschwindigkeiten

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x)\, e^{i n \frac{\sigma}{R} y}, \qquad v(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(x)\, e^{i n \frac{\sigma}{R} y},$$

wobei wir unter $u$ stets eine Geschwindigkeit in der $x$-Richtung und unter $v$ eine solche in der $y$-Richtung verstehen.

Handelt es sich speziell um eine Potentialströmung, so muß für $n \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} u_n(x) &= A_n\, e^{n \frac{\sigma}{R} x} + B_n\, e^{-n \frac{\sigma}{R} x}, \\ v_n(x) &= i\, A_n\, e^{n \frac{\sigma}{R} x} - i\, B_n\, e^{-n \frac{\sigma}{R} x} \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

[1] Diese Voraussetzung ist nicht wesentlich. Die beiden genannten Hauptergebnisse gelten auch dann, wenn die Stützrippen verschieden, unsymmetrisch bzw. angestellt sind. Die Beweisführung ist dann ein wenig abzuändern.

und für $n = 0$

$$u_0(x) = A_0, \qquad v_0(x) = B_0 \tag{2}$$

sein, wobei die $A_K$ und $B_K$ Konstante sind.

Betrachtet man insbesondere die Störung, die im Falle I von den Stützrippen am Orte des Leitapparates erzeugt wird, wenn dieser nicht vorhanden ist, so kann diese, da die axiale Störgeschwindigkeit in $y$ gerade ist und mit wachsendem $x$ abklingt, wegen (1) in der Form

$$u_s - i\,v_s = W_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} \tag{3}$$

geschrieben werden, wobei die $a_n$ wegen 8) reell sind. Die Größe $a_n W_0$ gibt die Amplitude der $n\,\sigma$ Harmonischen der Störung auf dem Umfang an. Die $a_n$ sehen wir hier als gegeben an, sie sind durch die Stützrippenreihe und ihre Lage zum Gitter bestimmt.

Ganz analog kann in dem Falle II die Störung, welche die mit der Geschwindigkeit $W_1$ angeströmte Stützrippenreihe am Orte des Gitters erzeugt, falls dieses nicht vorhanden ist, in der Form

$$u_s - i\,v_s = W_1 \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} \tag{4}$$

mit reellen $b_n$ geschrieben werden. Die $b_n$ seien gegeben.

In dem Leitgitter muß die Strömung an den Schaufeln diesen parallel gerichtet sein. Um dies zu erreichen, wird man die Schaufeln mit Wirbeln belegen. Da aber die Schaufelzahl als unendlich groß vorausgesetzt wurde, so bedeutet dies eine Belegung des gesamten Schaufelraumes mit Wirbeln. Es ist zweckmäßig, dabei diejenigen Wirbel, die auf einer Parallelen zur Gitterachse liegen, zu einer Schicht zusammenzufassen.

Wir bestimmen zunächst das Feld einer derartigen Wirbelschicht, die mit der $y$-Achse zusammenfallen möge. Die Wirbeldichte längs der Schicht sei $\Gamma(y)$. Wir schreiben

$$\Gamma(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n\, e^{in\frac{\sigma}{R}y}$$

und berechnen das zu $\Gamma_n e^{in\frac{\sigma}{R}y}$ gehörige Feld, wobei wir noch $n \neq 0$ annehmen wollen. Wegen (1) ergibt sich für die von dieser Schicht induzierten Geschwindigkeiten, falls

| $x < 0$ | $0 < x$ |
|---|---|
| $u_n = C_n\, e^{\lvert n\rvert\frac{\sigma}{R}x}$, | $u_n = D_n\, e^{-\lvert n\rvert\frac{\sigma}{R}x}$, |
| $v_n = i\,\frac{n}{\lvert n\rvert}\, C_n\, e^{\lvert n\rvert\frac{\sigma}{R}x}$, | $v_n = -i\cdot\frac{n}{\lvert n\rvert}\, D_n\, e^{-\lvert n\rvert\frac{\sigma}{R}x}$. |

Wegen der Kontinuität beim Durchgang durch die Schicht muß $C_n = D_n$, weiter muß

$$v_n(-0) - v_n(+0) = 2\,i\,\frac{n}{\lvert n\rvert}\, D_n = \Gamma_n$$

sein. Damit ergibt sich für das von $\Gamma_n$ induzierte Feld

$$u_n - i\,v_n = \frac{i}{2}\,\Gamma_n \cdot \left(\frac{x}{\lvert x\rvert} - \frac{n}{\lvert n\rvert}\right) e^{n\frac{\sigma}{R}x} \qquad (n \neq 0). \tag{5}$$

Ist $n = 0$, so findet man, da eine derartige Schicht nur stromabwärts induziert,

$$u_0 - i\,v_0 = \frac{i}{2}\left(1 + \frac{x}{\lvert x\rvert}\right)\Gamma_0.$$

Insgesamt erzeugt also die bei $x = 0$ liegende Wirbelschicht das Feld

$$u - i\,v = \frac{i}{2}\left(1 + \frac{x}{\lvert x\rvert}\right)\Gamma_0 + \frac{i}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \Gamma_n \cdot \left(\frac{x}{\lvert x\rvert} - \frac{n}{\lvert n\rvert}\right) e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy)}.$$

Beachtet man noch, daß $\Gamma(y)$ reell und mithin $\Gamma_{-n} = \overline{\Gamma_n}$ ist — durch den Querstrich wird der Übergang zur konjugiert komplexen Größe angedeutet — so kann man auch schreiben

$$u - i\,v = \frac{i}{2}\left(1 + \frac{x}{\lvert x\rvert}\right)\Gamma_0 - \frac{i}{2}\left(1 - \frac{x}{\lvert x\rvert}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n\, e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} + \frac{i}{2}\left(1 + \frac{x}{\lvert x\rvert}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\Gamma_n}\, e^{-n\frac{\sigma}{R}(x+iy)}. \tag{6}$$

Mit derartigen Schichten hat man den gesamten Schaufelraum zu überdecken. Außerdem muß man noch, um die Randbedingungen befriedigen zu können, eine isolierte Wirbelschicht längs der Vorderkante anbringen. Diese entspricht der Singularität an der Vorderkante der Platte. Bezeichnet man die Wirbeldichte der Schicht längs der $y$-Achse wie oben mit $\Gamma(y)$ und die Flächendichte im Inneren des Gitters mit $\gamma(x, y)$, so erhält man für das von der Wirbelbelegung des Schaufelkranzes induzierte Feld nach (6) die Darstellung

$$\left.\begin{aligned} u_w - i\,v_w = {} & \frac{i}{2}\,\Gamma_0\left(1+\frac{x}{|x|}\right) - \frac{i}{2}\left(1-\frac{x}{|x|}\right)\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,\Gamma_n\,e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} + \\ & + \frac{i}{2}\left(1+\frac{x}{|x|}\right)\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,\overline{\Gamma_n}\,e^{-n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} + \frac{i}{2}\int_0^c \gamma_0(\xi)\left(1+\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)d\xi - \\ & - \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\int_0^c \gamma_n(\xi)\left(1-\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)e^{n\frac{\sigma}{R}(x-\xi+iy)}\,d\xi + \\ & + \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\int_0^c \overline{\gamma_n(\xi)}\left(1+\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)e^{-n\frac{\sigma}{R}(x-\xi+iy)}\,d\xi\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Dabei ist die Tiefe des Leitkranzes gleich $c$ gesetzt.

Die Wirbelbelegung des Schaufelraumes ist so zu bestimmen, daß die resultierende Strömung

$$U - i\,V = (u_a + u_s + u_w) - i\,(v_a + v_s + v_w)\,, \tag{8}$$

wobei $u_a - i\,v_a$ das Anströmfeld darstellt, also

$$u_a - i\,v_a = W_0 \qquad \text{im Falle I}$$

und

$$u_a - i\,v_a = W_1\,e^{-i\beta_a} \qquad \text{im Falle II,}$$

zu den Schaufeln tangential verläuft. Ist die Skelettlinie der Schaufeln durch

$$y = f(x) \quad \text{für} \quad 0 \le x \le c$$

gegeben und setzt man

$$f'(x) = \operatorname{tg}\beta(x)\,,$$

bezeichnet also mit $\beta(x)$ den örtlichen Umlenkungswinkel, so muß im Schaufelraum, d. h. für $0 < x < c$,

$$-\,U\sin\beta(x) + V\cos\beta(x) = 0\,,$$

also

$$U - i\,V = (U + i\,V)\,e^{-2i\beta(x)} \tag{9}$$

sein.

Da in den beiden hier zu betrachtenden Fällen das Störfeld in der Form

$$u_s - i\,v_s = \sum_{-\infty}^{\infty}{}'\,A_n\,e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} \qquad (n \neq 0) \tag{10}$$

geschrieben werden kann, so geht die Randbedingung (9) mit (8), (7) und (10) in die folgende Gleichung über:

$$\begin{aligned} & u_a - i\,v_a + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\,A_n\,e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} + i\,\Gamma_0 + i\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,\overline{\Gamma_n}\,e^{-n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} + i\int_0^x \gamma_0(\xi)\,d\xi - \\ & - i\sum_{n=1}^{\infty}{}'\int_x^c \gamma_n(\xi)\,e^{n\frac{\sigma}{R}(x-\xi+iy)}\,d\xi + i\sum_{n=1}^{\infty}{}'\int_0^x \overline{\gamma_n(\xi)}\,e^{-n\frac{\sigma}{R}(x-\xi+iy)}\,d\xi = \\ & = e^{-2i\beta(x)}\left\{u_a + i\,v_a + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\,A_n\,e^{n\frac{\sigma}{R}(x-iy)} - i\,\Gamma_0 - i\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,\Gamma_n\,e^{-n\frac{\sigma}{R}(x-iy)} - \right. \\ & \left. - i\int_0^x \gamma_0(\xi)\,d\xi + i\sum_{n=1}^{\infty}{}'\int_x^c \gamma_n(\xi)\,e^{n\frac{\sigma}{R}(x-\xi-iy)}\,d\xi - i\sum_{n=1}^{\infty}{}'\int_0^x \gamma_n(\xi)\,e^{-n\frac{\sigma}{R}(x-\xi-iy)}\,d\xi\right\}. \end{aligned}$$

Betrachtet man hierin die Glieder mit dem Faktor $e^{i|n|\frac{\sigma}{R}y}$ $(n \neq 0)$, so müssen diese für sich genommen die Gleichung befriedigen, d. h. es muß in $0 < x < c$

$$\left.\begin{aligned} A_{|n|}\, e^{|n|\frac{\sigma}{R}x} - i\int_x^c \gamma_{|n|}(\xi)\, e^{|n|\frac{\sigma}{R}(x-\xi)}\, d\xi = e^{-2i\beta(x)}\Big[ & A_{-|n|}\, e^{-|n|\frac{\sigma}{R}x} - \\ & - i\, \Gamma_{|n|}\, e^{-|n|\frac{\sigma}{R}x} - i\int_0^x \gamma_{|n|}(\xi)\, e^{-|n|\frac{\sigma}{R}(x-\xi)}\, d\xi\Big] \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

gelten. Die Glieder mit dem Faktor $\cdot e^{-i|n|\frac{\sigma}{R}y}$ liefern die zu (11) konjugiert komplexe Beziehung, also keine neue Bedingung. Für $n = 0$ ergibt sich noch

$$u_a - i\, v_a + i\, \Gamma_0 + i\int_0^x \gamma_0(\xi)\, d\xi = e^{-2i\beta(x)}\left[u_a + i\, v_a - i\, \Gamma_0 - i\int_0^x \gamma_0(\xi)\, d\xi\right]. \tag{12}$$

Die Gleichungen (11) und (12) stellen die Integralgleichungen zur Bestimmung der Wirbelverteilung im Schaufelraum dar. Die Gleichung (12) entspricht dabei dem ungestörten Fall, aus ihr folgt

$$u_a \operatorname{tg}\beta(x) - v_a + \Gamma_0 + \int_0^x \gamma_0(\xi)\, d\xi = 0$$

und daraus für $x \to 0$

$$\Gamma_0 = v_a - u_a \cdot f'(0) \tag{13a}$$

bzw. durch Differentiation

$$\gamma_0(x) = -\, u_a f''(x). \tag{13b}$$

Damit ist die Gleichung (12) gelöst. Die Gleichung (11), d. h. den Störanteil, behandeln wir für die beiden Fälle I und II getrennt.

**3. Stützrippenreihe vor dem Eintrittsleitrad.** In diesem Falle ist die Anströmung durch

$$u_a = W_0 \quad \text{und} \quad v_a = 0$$

gegeben. Weiter ist nach (3) und (10)

$$A_n = 0, \quad \text{wenn} \quad n > 0$$

und

$$A_n = W_0\, a_{-n}, \quad \text{wenn} \quad n < 0.$$

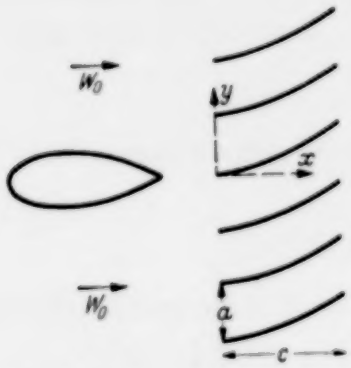


Abb. 1. Stützrippenreihe vor Beschleunigungsgitter.

Geht man damit in die Integralgleichung (11) ein, so geht diese in die Gleichung

$$-\int_x^c \gamma_n(\xi)\, e^{-n\frac{\sigma}{R}\xi}\, d\xi = e^{-2n\frac{\sigma}{R}x - 2i\beta(x)} \left[W_0\, a_n - i\, \Gamma_n - i\int_0^x \gamma_n(\xi)\, e^{n\frac{\sigma}{R}\xi}\, d\xi\right]$$

für $n = 1, 2, 3 \ldots$ und $0 < x < c$ über. Diese Gleichung wird offenbar durch

$$\Gamma_n = -\, i\, W_0\, a_n, \quad \gamma_n(\xi) = 0 \tag{14}$$

gelöst. Damit ist die Wirbelverteilung für das Gitter vollkommen bestimmt und das resultierende Geschwindigkeitsfeld $U - i\, V$ kann in der Umgebung des Gitters berechnet werden. Hierfür erhält man aus (8), (3) und (7) unter Beachtung von (13a, b) und (14) den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} U - i\, V = W_0 - \frac{i}{2} W_0\left(1 + \frac{x}{|x|}\right) f'(0) - \frac{i}{2} W_0 \int_0^c f''(\xi)\left[1 + \frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right] d\xi + \\ + \frac{1}{2} W_0\left(1 - \frac{x}{|x|}\right) \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left[e^{-n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} - e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy)}\right] a_n. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Daraus ersieht man, daß hinter dem Gitter die ungestörte Abströmgeschwindigkeit herrscht. Die Störung dringt also in diesem Falle nicht durch das Gitter hindurch.

**4. Stützrippenreihe hinter dem Austrittsleitrad.** In diesem Falle ist das Anströmfeld durch

$$u_a - i\,v_a = W_0\,e^{-i\beta_0}$$

gegeben, und für das Störfeld gilt

$$A_n = W_1\,b_n \text{ für } n < 0\,,$$
$$A_n = 0 \quad \text{für } n \leq 0\,,$$

so daß also die Integralgleichung (11) hier die Form

$$W_1\,b_n - i\int_x^c \gamma_n(\xi)\,e^{-n\frac{\sigma}{R}\xi}\,d\xi = -\,i\,e^{-2\left(n\frac{\sigma}{R}x + i\beta(x)\right)}\left[\Gamma_n + \int_0^x \gamma_n(\xi)\,e^{n\frac{\sigma}{R}\xi}\,d\xi\right] \tag{16}$$

für $n = 1, 2, 3 \ldots$ und $0 < x < c$ annimmt.

Im Gegensatz zu Ziff. 3 wollen wir uns hier auf die Betrachtung einer speziellen Form der Skelettlinie beschränken und annehmen, daß $\beta(x)$ eine lineare Funktion von $x$ ist. Weiter wollen wir voraussetzen, daß im ungestörten Fall der Eintritt in das Gitter stoßfrei erfolgt ($\Gamma_0 = 0$), also $\beta(0) = \beta_0$ ist. Da weiter die Abströmrichtung durch $\beta(c)$ gegeben ist und horizontal sein soll, so ergibt sich

$$\beta(x) = \beta_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{c}\right)$$

und mithin

$$f(x) = \frac{c}{\beta_0}\ln\cos\beta_0\left(1 - \frac{x}{c}\right).$$

Um die Integralgleichung (16) zu lösen, differenzieren wir sie nach $x$ und erhalten durch eine leichte Umformung

$$\gamma_n(x)\,e^{n\frac{\sigma}{R}x}\left(1 + e^{2i\beta(x)}\right) = 2\left(n\frac{\sigma}{R} - i\frac{\beta_0}{c}\right)\left[\Gamma_n + \int_0^x \gamma_n(\xi)\,e^{+n\frac{\sigma}{R}\xi}\,d\xi\right] \tag{17}$$

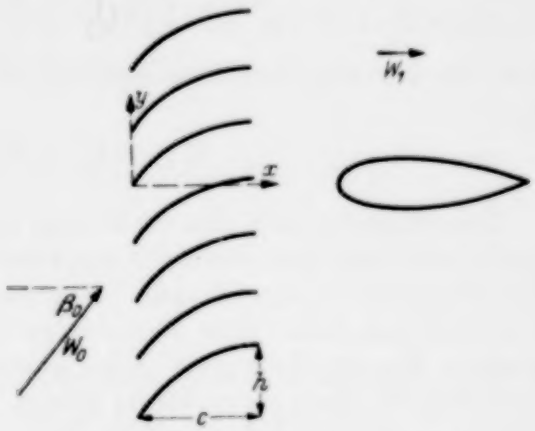


Abb. 2. Stützrippenreihe hinter einem Verzögerungsgitter.

und daraus durch Differentiation und Division durch $1 + e^{2i\beta(x)}$ die Differentialgleichung

$$\gamma_n'(x) + \left(2\frac{\beta_0}{c} + i\,n\frac{\sigma}{R}\right)\gamma_n(x)\,\mathrm{tg}\,\beta(x) = 0\,,$$

also

$$\gamma_n(x) = C\,e^{-\left(2\frac{\beta_0}{c} + i\,n\frac{\sigma}{R}\right)f(x)}\,, \tag{18}$$

wobei die Konstante $C = \gamma_n(c)$ noch zu bestimmen ist. Dazu multipliziere man (16) mit $e^{2\left(n\frac{\sigma}{R}x + i\beta(x)\right)}$ und differenziere. Man erhält dann

$$2\left[n\frac{\sigma}{R} - i\frac{\beta_0}{c}\right]\left[W_1\,b_n - i\int_x^c \gamma_n(\xi)\,e^{-n\frac{\sigma}{R}\xi}\,d\xi\right]e^{n\frac{\sigma}{R}x + 2i\beta(x)} = -\,i\,\gamma_n(x)\left(1 + e^{2i\beta(x)}\right)$$

und daraus für $x = c$

$$C = \gamma_n(c) = i\left(n\frac{\sigma}{R} - i\frac{\beta_0}{c}\right)W_1\,b_n\,e^{n\frac{\sigma}{R}c}\,. \tag{19}$$

Damit ist $\gamma_n(x)$ bestimmt. Weiter folgt aus (17) für $x = 0$

$$2\left(n\frac{\sigma}{R} - i\frac{\beta_0}{c}\right)\Gamma_n = 2\cdot\gamma_n(0)\,e^{i\beta_0}\cos\beta_0\,,$$

also

$$\Gamma_n = i\,W_1\,b_n\cos\beta_0\,e^{i\beta_0 + n\frac{\sigma}{R}c - \left(2\frac{\beta_0}{c} + i\,n\frac{\sigma}{R}\right)\cdot f(0)} = i\,\frac{W_1\,b_n}{\cos\beta_0}\,e^{i\beta_0 + n\frac{\sigma}{R}(c + ih)}\,; \tag{20}$$

dabei ist (Abb. 2) $f(0) = -\,h$ gesetzt.

Mit den Formeln (18), (19) und (20) ist die Wirbelverteilung im Schaufelraum bekannt und es kann das von den Wirbeln induzierte Feld berechnet werden. Wir beschränken uns hier auf die Bestimmung dieses Feldes vor dem Gitter und erhalten hierfür nach (7)

$$u_W - i\,v_W = -\,i\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n\, e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} - i\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^c \gamma_n(\xi)\, e^{n\frac{\sigma}{R}(x-\xi+iy)}\,d\xi\,.$$

Da aus (16) für $x = 0$

$$-\,i\int_0^c \gamma_n(\xi)\, e^{-n\frac{\sigma}{R}\xi}\,d\xi = -\,W_1\,b_n - i\,\Gamma_n\, e^{-2i\beta_0}$$

folgt, so kann die von dem Gitter induzierte Geschwindigkeit auch in der Form

$$u_W - i\,v_W = -\,W_1\cdot\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy)} - i\left(1+e^{-2i\beta_0}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\, e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy)}$$

dargestellt werden. Setzt man darin den Wert (20) für $\Gamma_n$ ein und beachtet (4), so folgt

$$u_W - i\,v_W = -\,(u_s - i\,v_s) + 2\,W_1\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy+e+ih)}\,.$$

Für das gesamte Geschwindigkeitsfeld vor dem Gitter ergibt sich also

$$U - i\,V = W_0\, e^{-i\beta_0} + 2\,W_1\sum_{1}^{\infty} b_n\, e^{n\frac{\sigma}{R}(x+iy+e+ih)}\,.$$

Das Störfeld wird also in diesem Fall durch das Gitter nicht ausgelöscht, sondern verstärkt. Sieht man von dem Faktor 2 zunächst einmal ab, so verhält sich die Störung so, als ob die an der Hinterkante herrschende Störgröße längs des Gitters bis zur Vorderkante gleitet und sich von dort aus nach dem Potentialgesetz ausbreitet, d. h., der Abstand des betrachteten Aufpunktes bis zur Störquelle wird gewissermaßen um die Gittertiefe verkürzt. Außerdem tritt noch eine Verdoppelung dieses Feldes ein. Diese Aussage ist hier allerdings nur für den Fall bewiesen worden, daß der örtliche Umlenkungswinkel $\beta(x)$ eine lineare Funktion von $x$ ist. Vermutlich gilt sie aber auch noch für allgemeinere Verteilungsformen der Umlenkung. Weiter war noch vorausgesetzt, daß die Schaufeln des Gitters alle einander gleich sind. Es läßt sich zeigen, daß bei gegebener Störung die Schaufeln so verformt werden können, daß die Störung durch das Gitter nicht hindurchdringt.

**5. Schlußbemerkung.** Die wesentlichen Ergebnisse dieser Untersuchung, daß eine Störung vor dem Gitter durch das Gitter vollständig ausgelöscht, eine Störung hinter dem Gitter durch dieses nach vorn verschoben und verdoppelt wird, sind hauptsächlich durch die Voraussetzung bedingt, daß die Gitterteilung ($a$) klein gegenüber der Tiefe ($c$) des Schaufelraumes ist, man sich also auf eine lineare Theorie in $a/c$ beschränken kann. Dies ist gleichbedeutend damit, daß in dem gesamten Schaufelraum — insbesondere also auch am Austritt — die Strömungsrichtung vollständig mit der Richtung der Gitterschaufeln übereinstimmt. Um zu einer Abschätzung des Gültigkeitsbereiches zu gelangen, kann man z. B. für den Fall eines homogen angeströmten Streckengitters die Ergebnisse, die die lineare Theorie für den Auftriebsbeiwert liefert, mit denjenigen der exakten Theorie vergleichen[1]. Es zeigt sich, daß man bis zu Werten von $a/t = 0{,}8$ ($t$ = Schaufeltiefe) eine sehr gute Übereinstimmung erhält. Ist die Anzahl der Stützrippen nicht zu groß, die Anströmung des Leitgitters also einigermaßen homogen, so wird man annehmen dürfen, daß die lineare Theorie bis zu dem eben genannten Wert auch im vorliegenden Fall noch gut brauchbare Ergebnisse liefert. Ist die Teilung größer, aber noch nicht zu groß gegenüber der Flügeltiefe, so hängt die Strömungsrichtung am Austritt nur wenig von der Richtung der Zuströmung ab, so daß die gefundenen Ergebnisse wenigstens noch angenähert zutreffen werden.

(Eingegangen am 24. Mai 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr. *Heinz Söhngen*, Darmstadt, Technische Hochschule, Inst. für Mathematik.

[1] *F. Weinig*, Aerodynamik der Luftschraube, S. 139, Fig. 140, Berlin 1940.

# Vergleich zweier Verfahren zur Ermittlung der spezifischen Oberfläche des Mahlgutes.

Von G. Matz.

**1. Einleitung.** Für alle Mahl- und Zerkleinerungsvorgänge der Technik und auch für andere Kornverteilungen spielt die bezogene Oberfläche, d. h. die Oberflächenentwicklung je Gewichtseinheit eine große Rolle, da sie das eigentliche Maß des Feinheitsgrades der Mahlung ist. Die rechnerische Ermittlung der spezifischen Oberfläche ($m^2/kg$) des Mahlgutes ist kein an sich neues Problem, aber die Unstimmigkeiten in älteren Arbeiten und die Tatsache, daß es zwei Verfahren gibt, die z.T. recht verschiedene Oberflächenwerte liefern, machten eine exakte Durcharbeitung des ganzen Gebietes notwendig[1].

**2. Das Oberflächenintegral nach Rammler.** Nimmt man mit *Rosin*, *Rammler* und *Sperling* an, daß die Kornverteilung des Mahlgutes ein Exponentialgesetz befolgt, das die Sieb-Rückstände mit der Korngröße bzw. Siebmaschenweite durch die Beziehung

$$R = 100\, e^{-b d^n} \tag{1}$$

verknüpft, so erhält man nach *Rammler*[2] für die spezifische Oberfläche den Wert

$$O = \frac{6 \cdot 10^6}{s} f n b \int_{d_{min}}^{d_{max}} d^{n-2}\, e^{-b d^n}\, d(d)\,. \tag{2}$$

Hierbei ist $R$ der Sieb-Rückstand in Gew.-%, $d$ die Korngröße bzw. Siebmaschenweite in $\mu$, $d'$ die durchschnittliche (vom Material abhängige) Korngröße, bei der der Rückstand auf $e^{-1} = 36{,}8\%$ gesunken ist, $n$ die Gleichmäßigkeitszahl (je kleiner $n$, desto höher der Feinanteil des Gekörns; $n = \infty$ bedeutet gleichkörniges, isodisperses Gut), $b = 1/d'^n$, $O$ die spezifische Oberfläche in $m^2/kg$, $s$ das spezifische Gewicht des Mahlgutes in $kg/m^3$, $f$ ein vom Material abhängiger Formfaktor (*Heywood*-Faktor).

Wir wollen die spezifische Oberfläche $O$ für $n = 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 1{,}0;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}5;\ 1{,}75;\ 2{,}0;\ 2{,}5;\ 3{,}0$ und $\infty$ berechnen. Der von *Rammler*[2] gefundene Ausdruck für das Integral in (2)

$$O = \frac{6 \cdot 10^6}{s} f n b \left[ \frac{d^{n-1}}{n-1} - \frac{b\, d^{2n-1}}{(2n-1)\,1!} + \frac{b^2\, d^{3n-1}}{(3n-1)\,2!} - \frac{b^3\, d^{4n-1}}{(4n-1)\,3!} \pm \cdots \right]_{d_{min}}^{d_{max}}$$

befriedigt nicht, da er für $n = 1,\ {}^1/_2,\ {}^1/_3,\ {}^1/_4$ usw. $\left(\text{allgemein } n = \frac{1}{K+1}\right)$ unendlich wird.

Zur Auswertung entwickeln wir zunächst die Exponentialfunktion des Integranden in eine Reihe und erhalten

$$e^{-b d^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{d^{kn}}{k!}\,.$$

Durch Einsetzen in (2) ergibt sich

$$O = \frac{6 \cdot 10^6}{s} f n b \int_{d_{min}}^{d_{max}} d^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{d^{kn}}{k!}\, d(d)\,,$$

$$= C \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \int_{d_{min}}^{d_{max}} d^{n-2}\, \frac{d^{kn}}{k!}\, d(d)\,,$$

---

[1] *S. Kießkalt* und *G. Matz*, Z. VDI, 93 (1951) S. 58.
[2] *E. Rammler*, Verfahrenstechnik ZVDI-Beiheft 1940 Nr. 5.

$$= C \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(-b)^k}{k!} \int_{d_{min}}^{d_{max}} d^{n(k+1)-2}\, d(d)$$

mit $C = \frac{6 \cdot 10^6}{s} f n b$.

Jetzt müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1) $n = \frac{1}{K+1}$ mit $K = 0, 1, 2 \ldots$. Dann ist

$$O = C \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(-b)^k}{k!} \frac{1}{n(k+1)-1} \left[ d^{n(k+1)-1} \right]_{d_{min}}^{d_{max}} + \frac{(-b)^K}{K!} C \left[ \ln d \right]_{d_{min}}^{d_{max}}. \tag{3}$$

Hierbei ist durch $\sum'$ symbolisiert, daß das Glied $k = K = \frac{1}{n} - 1$ in der Summe nicht auftritt.

2) $n \neq \frac{1}{K+1}$ mit $K = 0, 1, 2, \ldots$. Dann ist

$$O = C \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \cdot \frac{1}{k!} \frac{1}{n^{(k+1)-1}} \left[ d^{n(k+1)-1} \right]_{d_{min}}^{d_{max}}. \tag{4}$$

Nur im Falle (2) kommt also kein logarithmisches Glied vor, das *Rammler* ganz allgemein weggelassen hat. Wir müssen uns indessen für den häufigen Fall 1) der Formel (3) bedienen.

**3. Vereinfachung und Neuauswertung des Oberflächenintegrals durch Substitution.** Die Gleichungen (3) und (4) sind aber noch zu schwerfällig, da sie den dimensionsbehafteten Faktor $b$ enthalten. Wir lassen $b = (d')^{-n}$ in (2) stehen, substituieren dort $y = (d/d')^n$ und erhalten

$$\left.\begin{aligned} O &= \frac{6 \cdot 10^6}{s} f n \frac{1}{(d')^n} \int_{d_{min}}^{d_{max}} d^{-1}\, e^{-\left(\frac{d}{d'}\right)^n} d^{n-1}\, d(d), \\ &= \frac{6 \cdot 10^6}{s} \frac{f}{d'} \int_{y_{min}}^{y_{max}} y^{-\frac{1}{n}} e^{-y}\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Gleichung (5) kann ähnlich wie (2) durch Reihenentwicklung des Integranden ausgewertet werden.

Auch hier müssen analog zu oben die beiden Fälle 1) und 2) unterschieden werden:

1) $n = \frac{1}{K+1}$ mit $K = 0, 1, 2, \ldots$. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \int_{y_{min}}^{y_{max}} y^{-\frac{1}{n}} e^{-y}\, dy &= \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k}{k!} \int_{y_{min}}^{y_{max}} y^{k-\frac{1}{n}}\, dy = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{1}{n}} \left[ y^{k+1-\frac{1}{n}} \right]_{y_{min}}^{y_{max}} \\ &+ \frac{(-1)^K}{K!} \left[ \ln y \right]_{y_{min}}^{y_{max}} = \left[ y^{1-\frac{1}{n}} \right]_{y_{min}}^{y_{max}} \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k}{k+1-\frac{1}{n}} \left[ \frac{y^k}{k!} \right]_{y_{min}}^{y_{max}} + \frac{(-1)^K}{K!} \left[ \ln y \right]_{y_{min}}^{y_{max}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

2) $n \neq \frac{1}{K+1}$, mit $K = 0, 1, 2, \ldots$. Dann ist

$$\int_{y_{min}}^{y_{max}} y^{-\frac{1}{n}} e^{-y}\, dy = \left[ y^{1-\frac{1}{n}} \right]_{y_{min}}^{y_{max}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-\frac{1}{n}} \left[ \frac{y^k}{k!} \right]_{y_{min}}^{y_{max}}. \tag{7}$$

Nach (6) wurde die Oberfläche für $n = 1$ berechnet, nach (7) für alle anderen $n$.

**4. Die Festlegung der Integralgrenzen.** Von grundlegender Wichtigkeit für die Auswertung des Integrals erweist sich die Festlegung der Grenzen. Bei der oberen Grenze ist das recht einfach. *Rammler* schreibt: „Mit bester Annäherung kann man die obere Grenzkorngröße setzen zu

$$d_{max} = \sqrt[n]{\frac{\ln 1000}{b}}''. \tag{8}$$

Daraus ergibt sich sofort

$$y_{max} = \ln 1000 = 6{,}92 \approx 7. \tag{9}$$

Wir haben überall mit der oberen Grenze 7 gerechnet; der Fehler, der dadurch entsteht, daß man nicht $d_{max} = \infty$ setzt, ist äußerst gering. Der Wert $y_{max} \approx 7$ entspricht einem Grenzrückstand $R = 0{,}1\%$.

Wählt man (physikalisch nicht realisierbar) für die untere Grenzkorngröße $d_{min} = 0$, so divergiert das Integral in Gleichung (2) für $n \leqq 1$. Dies ist nicht etwa ein Widerspruch zwischen Rechnung und Erfahrung. Im Gegenteil, je feinverteilter das Korn ist ($n \leqq 1$) und je kleiner die einzelnen Körner werden ($d \to 0$), um so riesenhafter muß die Oberfläche anwachsen. Da aber das Exponentialgesetz der Kornverteilung, das dem Integralausdruck zugrunde liegt, nicht für beliebig kleine $d$ gilt, muß eine endliche untere Grenze größer als 0 festgelegt werden. Hier gibt es zwei Methoden:

Nach Methode *I* setzt man die kleinste Korngröße so ein, daß hierfür $R = 99{,}9\%$ wird. Nach *Rammler* errechnet sich dann die kleinste Korngröße zu

$$d_{min} = \sqrt[n]{\frac{0{,}0004}{b \lg e}}. \tag{10}$$

Und hieraus folgt sofort in unserer einfachen dimensionslosen Schreibweise

$$y_{min} = \frac{0{,}0004}{\lg e} = 9{,}22 \cdot 10^{-4}.$$

Wir haben überall diese untere Grenze unseren Berechnungen zugrunde gelegt, weil sie sich der von uns benutzten dimensionslosen Schreibweise anpaßt und die untere Grenze $y_{min}$ zu einer reinen Zahl wird.

Bei der Methode *II* wird $d_{min} = 0{,}1\ \mu$ angenommen. Dadurch wird $y_{min} = (0{,}1/d')^n$ zu einer Funktion von $d'$, also wird auch das bestimmte Integral keine reine Zahl wie nach Methode *I*, sondern eine Funktion von $d'$. Natürlich unterscheiden sich die Ergebnisse beider Berechnungsmethoden und dürfen nicht miteinander verwechselt werden.

**5. Die endgültigen Oberflächen-Formeln.** Da bei beiden Methoden $y_{min} \ll 1$ ist, genügt es, in den Reihenentwicklungen (6) oder (7) für die untere Grenze das größte Glied mit $k = 0$ heranzuziehen. Dann folgt

für $n \neq 1$: $\quad$ Größtes Glied $= \dfrac{y^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}$,

für $n = 1$: $\quad$ Größtes Glied $= \ln y$.

Also lauten die endgültigen Oberflächenformeln

$$O = \frac{6 \cdot 10^6}{s} \frac{f}{d'} \int_{9{,}22 \cdot 10^{-4}}^{7} y^{-\frac{1}{n}} e^{-y}\, dy.$$

Für $n = 1$ kommt

$$O = \frac{6 \cdot 10^6}{s} \frac{f}{d'} \left| \ln 7 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{7^k}{k!} - \ln 9{,}22 \cdot 10^{-4} \right|. \tag{11}$$

für $n = 0{,}5$; $0{,}7$; $0{,}8$; $0{,}9$; $1{,}1$; $1{,}2$; $1{,}3$; $1{,}5$; $1{,}75$; $2{,}0$; $2{,}5$; $3{,}0$ u. $\infty$:

$$O = \frac{6 \cdot 10^6}{s} \frac{f}{d'} \left| 7^{1-\frac{1}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-\frac{1}{n}} \frac{7^k}{k!} - \frac{(9{,}22 \cdot 20 - 4)^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}} \right|. \tag{12}$$

Ferner gilt mit $O = O_{k_1}$ für $f = 1$ und mit $s = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$

$$O_{k_1} = \frac{6 \cdot 10^6}{10^3} \frac{1}{d'} \{\cdots\} = 6000 \frac{1}{d'} \{\cdots\} \quad (d' \text{ in } \mu;\ O_{k_1} \text{ in } \mathrm{m^2/kg}).$$

Nach den Formeln (11) und (12) sind die Werte der beigefügten Tabelle 1 berechnet. Bei der Summenberechnung ergeben sich folgende Schwierigkeiten: Da die Summen für große $n$ (2,5;

3,0) klein sind, müssen mindestens 19 Reihenglieder ($k = 0, \ldots 18$) berechnet werden, um eine Genauigkeit von $\pm$ 0,05 im Endergebnis zu erzielen. Eine wesentliche Vereinfachung erreicht man durch Einführung des *Euler*schen Integrals, das aber nur für $n > 1$ verwendet werden darf, während für $n \leq 1$ die Reihenentwicklung beibehalten werden muß.

Die Tabelle 1 zeigt nämlich (man vergleiche die Spalten 2 und 4), daß für $n = 1{,}1$; 1,2 und 1,3 das *Euler*sche Integral

$$\int_0^\infty y^{-\frac{1}{n}} e^{-y}\, dy = \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \Pi\left(-\frac{1}{n}\right)$$

nur wenig größer ist als die Summe der Spalte 2, d. h. das Integral

$$\int_0^7 y^{-\frac{1}{n}} e^{-y}\, dy\,.$$

Tabelle 1 (*nach Methode I für* $R_{max} = 99{,}9\%$).

| Spalte 1 | Spalte 2 | Spalte 3 | Spalte 4 | Spalte 5 | Spalte 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $7^{1-\frac{1}{n}} \sum_{k=0}^{18} \frac{(-1)^k}{k+1-\frac{1}{n}} \frac{7^k}{k!}$ | $7^{1-\frac{1}{n}} \sum_{k=0}^{18} \frac{(-1)^k}{k+1-\frac{1}{n}} \frac{7^k}{k!} - \frac{(9{,}22 \cdot 10^{-4})^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}$ | $\int_0^\infty y^{-\frac{1}{n}} e^{-y}\, dy = \Pi\left(-\frac{1}{n}\right)$ für $n>1$ | $\Pi\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{(9{,}22 \cdot 10^{-4})^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}$ für $n>1$ | $O_{k_1} \cdot d' \cdot 10^{-3}$ $= 6 \cdot$ Sp. 3 für $n \leq 1$ $6 \cdot$ Sp. 5 für $n>1$ |
| 0,6 | $-4{,}00$ | 154,4 | — | — | 926,40 |
| 0,7 | $-3{,}63$ | 43,15 | — | — | 258,90 |
| 0,8 | $-4{,}89$ | 18,07 | — | — | 108,42 |
| 0,9 | $-9{,}73$ | 9,71 | — | — | 58,26 |
| 1,0 | $\ln 7 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{7^k}{k!} = -0{,}57$ | $\ln 7 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{7^k}{k!} - \ln 9{,}22 \cdot 10^{-4} = 6{,}43$ | — | — | 38,52 |
| 1,1 | $+10{,}49$ | 4,63 | 10,64 | 4,78 | 28,68 |
| 1,2 | $+5{,}56$ | 3,70 | 5,58 | 3,72 | 22,32 |
| 1,3 | $+3{,}94$ | 3,07 | 3,95 | 3,09 | 18,54 |
| 1,5 | $+2{,}76$ | 2,46 | 2,68 | 2,39 | 14,34 |
| 1,75 | $+2{,}12$ | 2,00 | 2,07 | 1,95 | 11,70 |
| 2,0 | $+1{,}80$ | 1,74 | 1,77 | 1,71 | 10,26 |
| 2,5 | $+1{,}54$ | 1,52 | 1,49 | 1,46 | 8,76 |
| 3,0 | $+1{,}39$ | 1,38 | 1,36 | 1,35 | 8,10 |
| $\infty$ | — | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 6,00 |

Für $n = 1{,}5$; 1,75; 2,0; u. 3,0 ist die Summe sogar größer, das ist nur deshalb der Fall, weil die Entwicklung mit dem 19. Glied abgebrochen wurde. Wir sparen die ganze mühselige Aufsummierung der Reihe für $n>1$, wenn wir die Funktion $\Pi\left(-\frac{1}{n}\right)$ verwenden, deren Funktionswerte bequem aufgeschlagen werden können. Diese Tatsache beweist wiederum nur, daß es völlig unerheblich ist, ob wir 7 oder $\infty$ als obere Grenze annehmen. Demnach lauten die für die Berechnung zweckmäßigsten Oberflächenformeln für $n > 1$

a) für $y_{min} = 9{,}22 \cdot 10^{-4}$

$$O = \frac{6 \cdot 10^6}{s} \frac{f}{d'} \left\{ \int_0^\infty y^{-\frac{1}{n}} e^{-y}\, dy - \left[ \frac{y^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}} \right]_0^{y_{min}} \right\}$$

$$= \frac{6 \cdot 10^6}{s} \frac{f}{d'} \left\{ \Pi\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{(9{,}22 \cdot 10^{-4})^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}} \right\}, \tag{13}$$

$$O_{k_1} = 6 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{d'} \left\{ \Pi\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{(9{,}22 \cdot 10^{-4})^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}} \right\}, \quad \text{für } n > 1$$

b) für $d_{min} = 0{,}1\ \mu$ und $y_{min} = \left(\frac{0{,}1}{d'}\right)^n$

$$O_{k_1} = 6 \cdot 10^3 \frac{1}{d'} \left\{ \Pi\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{(0{,}1)^{n-1}}{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{(d')^{n-1}} \right\} \text{ für } n > 1\,. \tag{14}$$

**Tabelle 2 (*nach Methode II für* $d_{min} = 0{,}1\ \mu$).**

| Spalte 7 | Spalte 8 | Spalte 9 |
|---|---|---|
| $n$ | $7^{1-\frac{1}{n}} \sum_{k=0}^{18} \frac{(-1)^k}{k+1-\frac{1}{n}} \cdot \frac{7^k}{k!} - \frac{0{,}1^{n-1}}{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{(d')^{n-1}}$ | $\Pi\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{0{,}1^{n-1}}{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{(d')^{n-1}}$ für $n > 1$ |
| 0,6 | $-4{,}01 + 3{,}77\ (d')^{0{,}4}$ | — |
| 0,7 | $-3{,}63 + 4{,}65\ (d')^{0{,}3}$ | — |
| 0,8 | $-4{,}89 + 6{,}34\ (d')^{0{,}2}$ | — |
| 0,9 | $-9{,}73 + 11{,}34\ (d')^{0{,}1}$ | — |
| 1,0 | $\ln 7 + \sum_{k=1}^{18} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \frac{7^k}{k!} - \ln 0{,}1 + \ln d' = +1{,}73 + \ln d'$ | — |
| 1,1 | — | $+ 10{,}64 - \frac{8{,}78}{(d')^{0{,}1}}$ |
| 1,2 | — | $+ 5{,}58 - \frac{3{,}78}{(d')^{0{,}2}}$ |
| 1,3 | — | $+ 3{,}95 - \frac{2{,}17}{(d')^{0{,}3}}$ |
| 1,5 | — | $+ 2{,}68 - \frac{0{,}95}{(d')^{0{,}5}}$ |
| 1,75 | — | $+ 2{,}07 - \frac{0{,}41}{(d')^{0{,}75}}$ |
| 2,0 | — | $+ 1{,}77 - \frac{0{,}20}{d'}$ |
| 2,5 | — | $+ 1{,}49 - \frac{0{,}05}{(d')^{1{,}5}}$ |
| 3,0 | — | $+ 1{,}36 - \frac{0{,}02}{(d')^2}$ |
| $\infty$ | — | $+ 1{,}00$ |

$$O_{k_1} = 6 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{d'} \begin{cases} \text{Sp. 8 für } n \leq 1 \\ \text{Sp. 9 für } n > 1 \end{cases} \begin{matrix} d' \text{ in } \mu \\ O_{k_1} \text{ in } m^2/kg \end{matrix}$$

Für $n \leqq 1$ müssen wir die Reihenentwicklung durchführen, dann lassen sich die Gleichungen (11) und (12) nicht vereinfachen. Nimmt man für die untere Grenze des Integrals anstatt $y_{min} = 9{,}22 \cdot 10^{-4}$ (entsprechend einem Rückstand $R = 99{,}9\%$) $y_{min} = \left(\frac{d_{min}}{d'}\right)^n = \left(\frac{0{,}1}{d'}\right)^n$, so tritt dort an die Stelle des Gliedes

$$\frac{(9{,}22 \cdot 10^{-4})^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}} \text{ bzw. ln } 9{,}22 \cdot 10^{-4} \text{ das Glied } \frac{0{,}1^{n-1}}{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{(d')^{n-1}}$$

bzw. (ln 0,1 — ln $d'$). Somit ergibt sich für die Oberflächen die endgültige Wertetabelle 1 für die Berechnung nach Methode *I* und die Tabelle 2 für die Berechnung nach Methode *II* (mit $d_{min} = 0{,}1\ \mu$). Die Multiplikation der Spalte 8 bzw. 9 mit $6 \cdot 10^3/d'$ ergibt die gesuchten Oberflächenwerte $O_{k_1}$ nach Methode *II*, die ersichtlich bedeutend umständlicher als die Methode *I* ist. Spalte 8 zeigt, daß $O_{k_1}$ für $n = 0{,}6$ und $d' = 1\ \mu$ negativ würde, was natürlich physikalisch sinnlos ist.

Dies hat seinen Grund in folgendem: Wenn bei der Auswertung des Integrals in Form einer Reihenentwicklung für die untere Grenze $y_{min}$ nur das erste Glied berücksichtigt wurde, dann war Voraussetzung dafür, daß $y_{min} = (d_{min}/d') \ll 1$ ist. Wird nun $d' = 1\ \mu$, so ist diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt, und die Vernachlässigung der höheren Reihenglieder wirkt sich dahin aus, daß man einen negativen Wert für das Integral erhält. Für $d' = 10, 100, 1000\ \mu$ usw. ist jedoch die Voraussetzung gut erfüllt und die nach der Tabelle gerechneten Werte stimmen aufs beste mit den graphisch von S. *Kießkalt*[1] umgerechneten Werten überein. Beide unterscheiden sich natürlich (und besonders für kleine $n$ beträchtlich) von den nach der Methode *I* (entsprechend einem Rückstand $R$ von 99,9%) berechneten und gezeichneten Werten. In Tabelle 3 sind die Werte von $O_{K_1}$ für $d' = 10, 50, 100, 500$ und $1000\ \mu$ nach beiden Methoden zum Vergleich eingetragen.

Tabelle 3.

| $n$ \ $d'$ | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,6 | 3264 | 1670 | 1181 | 498 | 333 |
| | *92,640* | *18,528* | 9264 | 1853 | 926 |
| 0,7 | 3390 | 1365 | 892 | 319 | 200 |
| | *25,890* | 5178 | 2589 | 518 | 259 |
| 0,8 | 3096 | 1070 | 661 | 204 | 122 |
| | *10,842* | 2168 | 1084 | 217 | 108 |
| 0,9 | 2730 | 850 | 496 | 137 | 77,2 |
| | 5826 | 1165 | 583 | 117 | 58,3 |
| 1,0 | 2418 | 677 | 380 | 95,4 | 51,8 |
| | 3852 | 770 | 385 | 77,0 | 38,5 |
| 1,1 | 2184 | 564 | 306 | 71 | 37,1 |
| | 2868 | 574 | 287 | 57,4 | 28,7 |
| 1,2 | 1914 | 462 | 245 | 54 | 27,7 |
| | 2232 | 446 | 223 | 44,6 | 22,3 |
| 1,3 | 1716 | 394 | 204 | 43,4 | 22,1 |
| | 1854 | 371 | 185 | 37,1 | 18,5 |
| 1,5 | 1428 | 306 | 155 | 31,6 | 15,9 |
| | 1434 | 287 | 143 | 28,7 | 14,3 |
| 1,75 | 1198 | 246 | 123 | 24,9 | 12,4 |
| | 1170 | 234 | 117 | 23,4 | 11,7 |
| 2,0 | 1050 | 212 | 106 | 21,2 | 10,6 |
| | 1026 | 205 | 103 | 20,5 | 10,3 |
| 2,5 | 894 | 179 | 89,4 | 17,9 | 8,9 |
| | 876 | 175 | 87,6 | 17,5 | 8,8 |
| 3,0 | 816 | 163 | 81,6 | 16,3 | 8,1 |
| | 810 | 162 | 81,0 | 16,2 | 8,1 |
| | 600 | 120 | 60,0 | 12,0 | 6,0 |

$O_{k_1}$ in $m^2/kg$ { Oberer Wert nach Methode *II* entsprechend $d_{min} = 0{,}1\ \mu$
Unterer Wert nach Methode *I* entsprechend $R_{max} = 99{,}9\%$.

[1] S. *Kießkalt*, Bauwirtschaft Heft 1 (1949).

**6. Graphische Darstellung der spezifischen Oberfläche als Funktion von $d'$.** Aus der Form der Gleichungen (12) und (13) ist unmittelbar ersichtlich, daß sich in einem logarithmischen Netz mit $d'$ als Abszisse und $O_{K_1}$ als Ordinate die Oberflächen $O_{k_1}$ als Geradenschar mit dem Scharparameter $n$ darstellen. Alle diese Geraden für verschiedene $n$ sind einander parallel und haben eine Steigung von 135° gegen die positive $d'$-Achse, denn es ist z. B. nach (13), wenn wir den Faktor

$$6 \cdot 10^3 \left| \Pi\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{[9.22 \cdot 10^{-4}]^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}} \right| \quad \text{mit } C_n \text{ bezeichnen,}$$

$$O_{1_1} = \frac{c_n}{d'}\,; \quad \log O_{k_1} = \log C_n - \log d' \,.$$

Selbstverständlich gilt diese Überlegung nur für die untere Grenze $y_{min} = 9.22 \cdot 10^{-4}$. Für die untere Grenze $y_{min} = 0{,}1/d'$ erhält man hingegen keine reinen Geraden mehr, wenn auch das Glied $0.1^{n-1}/(1 - 1/n) \cdot 1/d'^{n-1}$, sehr klein werden kann (nämlich für hohe $n$). Je größer also $n$ wird um so geradenähnlicher werden die Oberflächenkurven sein (vgl. Abb. 1).

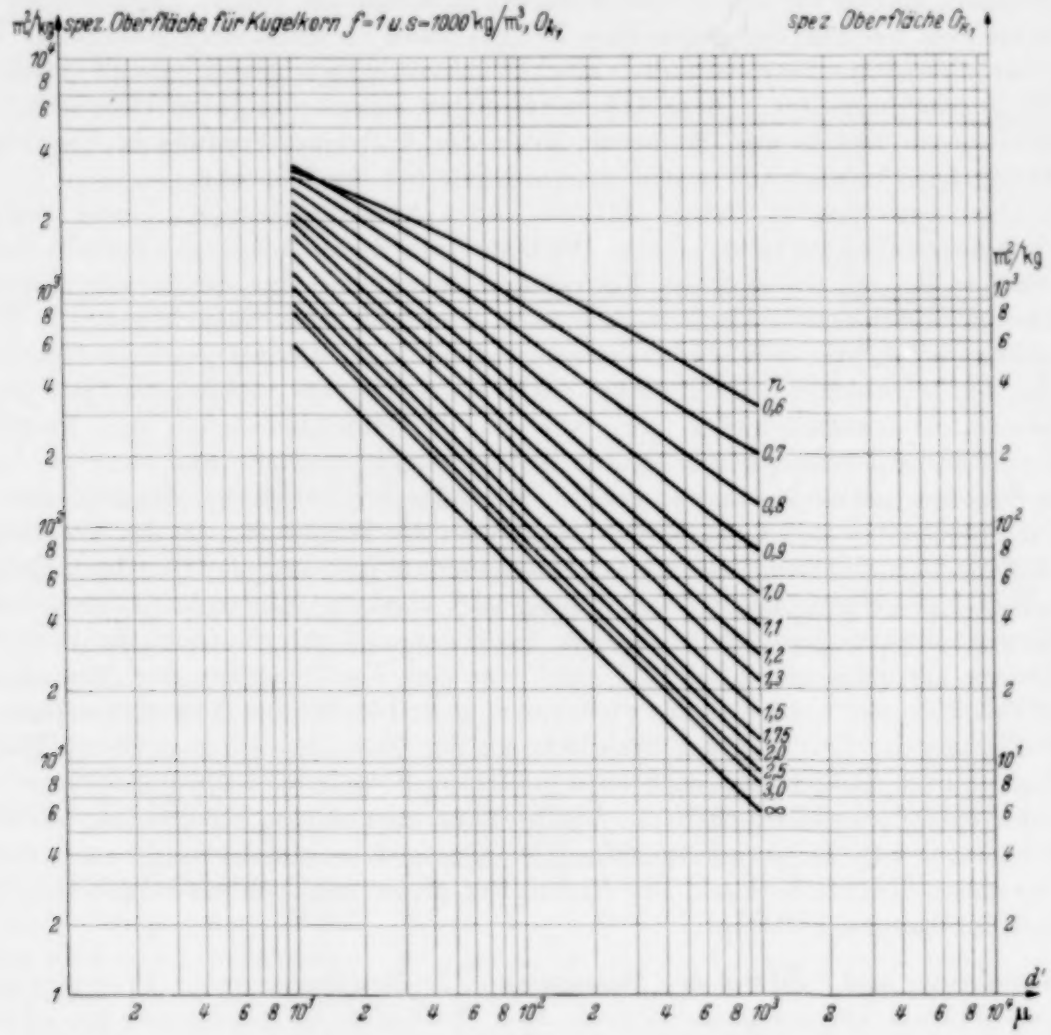


Abb. 1.

**7. Schlußbemerkung.** Die vorliegende Arbeit zeigt die Bedeutung einer höheren transzendenten Funktion, der Gammafunktion, für siebtechnische Probleme. Die Methode der Auswertung eines Integrals durch Reihenentwicklung und die Verwendung der Gammafunktion führen hier zur Lösung eines Problems, das für Füllstoffe auf dem Kunststoffgebiet, Baustoffe, Pigmente der Lack- und Farbenindustrie, Adsorbentien usw. von praktischem Interesse ist. Die numerische Berechnung der Oberflächenwerte ist deshalb notwendig, weil es bislang keine befriedigenden experimentellen Methoden zu ihrer Bestimmung gibt.

(Eingegangen am 6. Juni 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *G. Matz*, Leverkusen-Wiesdorf, Gellertstr. 5.

# Systematische Abwindmessungen an Pfeilflügeln*.

Von **H. Trienes** und **E. Truckenbrodt.**

**1. Einleitung.** Die Anzahl der Arbeiten, die sich mit der Bestimmung des Abwindes in der Umgebung eines Tragflügels befassen, ist sehr groß. Sowohl in experimenteller wie auch theoretischer Hinsicht wurde das Problem des ungepfeilten Flügels in zufriedenstellender Weise gelöst. Eine Zusammenfassung aller diesbezüglichen Arbeiten bis zum Jahre 1938 geben *I. Flügge-Lotz* und *D. Küchemann*[1]. In zwei weiteren Arbeiten amerikanischen Ursprungs[2] werden ebenfalls Meßergebnisse mit der Theorie verglichen. Von den zahlreichen theoretischen Arbeiten, die alle auf der Anwendung der *Prandtl*schen Tragflügeltheorie und des *Biot-Savart*schen Gesetzes beruhen, wollen wir nur die Arbeiten von *H. Multhopp*[3] und *E. Truckenbrodt*[4] erwähnen.

In neuerer Zeit hat nun der gepfeilte Flügel stark an Bedeutung gewonnen. Über systematische Sechskomponentenmessungen und Druckverteilungsmessungen an Pfeilflügeln hat kürzlich *W. Jacobs*[5] berichtet. Diese Arbeit vermittelt einen recht guten Überblick über die am Flügel auftretenden Kräfte und Momente, sowie die Auftriebsverteilung in Spannweiten- und Tiefenrichtung bei symmetrischer und unsymmetrischer Anströmung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit soll sein, über Abwindmessungen hinter denselben von *W. Jacobs* benutzten Flügeln zu berichten. Die Bedeutung dieser Messungen besteht darin, Unterlagen darüber zu liefern, wie sich der Beitrag des Höhenleitwerkes zur Stabilität um die Querachse mit dem Pfeilwinkel des Flugzeuges ändert. Durch die vom Flügel abgehende Wirbelfläche werden bekanntlich hinter dem auftrieberzeugenden Flügel Abwärtsgeschwindigkeiten hervorgerufen, die den wirksamen Anstellwinkel des Höhenleitwerkes verkleinern. Bei jedem Flügel hängen diese Abwindwinkel außer vom Abstand des Höhenleitwerkes zum Tragflügel noch sehr stark von der am Flügel herrschenden Auftriebsverteilung ab; und zwar ist der Abwindwinkel am Ort des Leitwerkes um so größer, je größer das Verhältnis des örtlichen Auftriebsbeiwertes in Flügelmitte zum Gesamtauftriebsbeiwert des Flügels ist. Ist der Tragflügel nun gepfeilt, so ändern sich einerseits die Abstandsverhältnisse und zum anderen beeinflußt die beim gepfeilten Flügel geänderte Auftriebsverteilung auch stark die Abwindwinkel am Ort des Leitwerkes. Beim rückwärts gepfeilten Flügel ist bei gleichem Gesamtauftrieb der Auftrieb in Flügelmitte kleiner als beim ungepfeilten Flügel, was eine Verkleinerung des Abwindwinkels zur Folge hat. Das bedeutet aber, daß die wirksamen Anstellwinkel des Höhenleitwerkes vergrößert werden, und damit das Leitwerk zur Stabilität um die Querachse einen größeren Beitrag liefert als beim ungepfeilten Flügel. Bei nach vorn gepfeilten Flügeln wird die stabilisierende Wirkung des Leitwerkes entsprechend verkleinert. Ähnlich kann man sich auch überlegen, daß bei gleichem Abstand beim stark zugespitzten Flügel das Höhenleitwerk erheblich weniger stark stabilisierend wirkt als bei einem Rechteckflügel. Die Richtigkeit dieser Angaben wird im Verlauf der Arbeit durch unsere Messungen bestätigt.

**2. Durchführung und Umfang der Messungen.** Zur Bestimmung des Abwindes in der Umgebung eines Flügels können grundsätzlich zwei Methoden verwendet werden. Die eine bestimmt den Abwind punktweise mittels eines Winkelmeßgerätes, z. B. Zwei- oder Vierfingergerät[1,2]. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß es außer den örtlichen Abwindwinkeln auch die Staudruckverteilung mitliefert. Es hat aber dafür den Nachteil, daß es recht mühsam und langwierig ist.

---

* Die Messungen stellen einen Auszug aus der von der Fakultät Maschinenwesen der Technischen Hochschule Braunschweig angenommenen Dissertation von *H. Trienes* dar (1946). (Hauptberichter: Prof. Dr. *H. Schlichting*, Mitberichter: Prof. Dr. *H. Blenk*). Sie wurden 1944/45 ausgeführt im Windkanal des früheren Aerodynamischen Institutes der T. H. Braunschweig (Leitung Prof. Dr. *H. Schlichting*). Die Bearbeitung für die Veröffentlichung wurde von *E. Truckenbrodt* vorgenommen; von ihm stammt auch der Abschnitt 4 über den Vergleich mit der Theorie.

[1] *I. Flügge-Lotz* und *D. Küchemann*, Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforsch., S. I 172.

[2] NACA Report No. 648 und 651 (1939).

[3] *H. Multhopp*, Luftfahrtforschung 15 (1938), S. 463.

[4] *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 233.

[5] *W. Jacobs*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 344 (I. Mitt.) und 19 (1951), S. 83 (II. Mitt.).

Die zweite Methode, die wesentlich schneller zum Ziele führt, bestimmt den Abwindwinkel mit Hilfe einer hinter oder vor dem Flügel befindlichen „Fühlfläche", die mit einem einfachen Gestänge am Flügel befestigt ist. Nach diesem Verfahren wurden die nachstehend mitgeteilten Messungen durchgeführt. Der angewendeten Methode liegt folgende Überlegung zugrunde: Es werden Dreikomponentenmessungen (Auftrieb, Widerstand und Kippmoment in Abhängigkeit vom Anstellwinkel) durchgeführt am Modell ohne Fühlfläche (Flügel + Gestänge) und am Modell mit Fühlfläche (Flügel + Gestänge + Endscheiben + Fühlfläche), vgl. Abb. 1 und Abb. 2. Wenn man die Messungen mit und ohne Fühlfläche vergleicht, dann gibt es

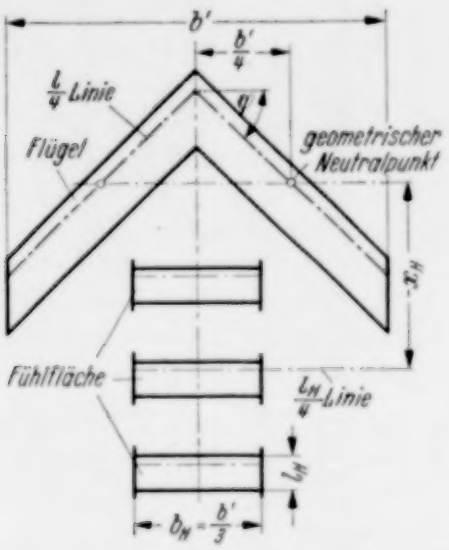


Abb. 1. Anordnung der Fühlfläche (Rechteckflügel).

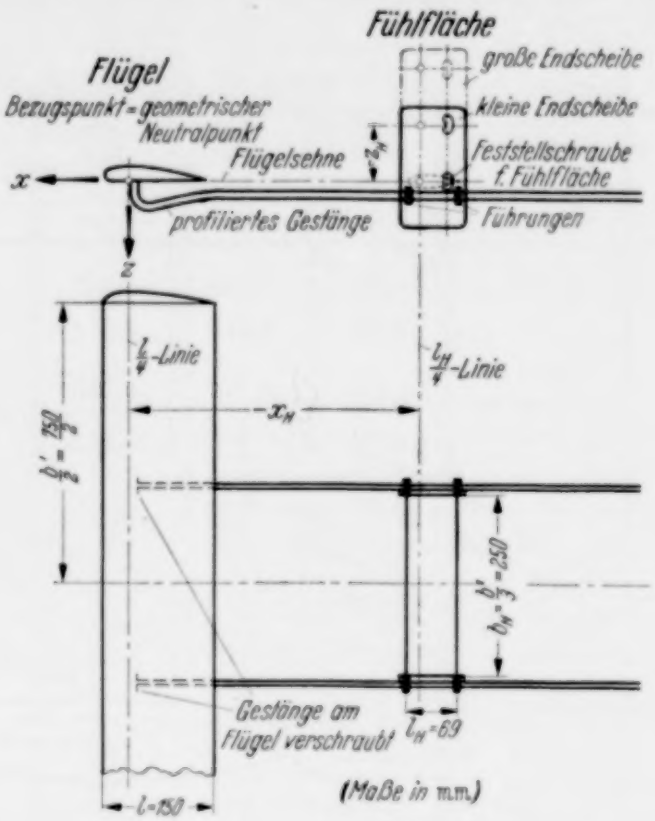


Abb. 2. Modellskizze des ungepfeilten Rechteckflügels.

einen ganz bestimmten Anstellwinkel des Flügels $\alpha^*$, bei dem das Kippmoment mit und ohne Fühlfläche gleich ist. Das bedeutet aber, daß bei diesem Winkel die Fühlfläche unbelastet ist, d. h. der Anstellwinkel der Fühlfläche $\alpha_H = 0$ ist[1]. Wie aus Abb. 3 hervorgeht, besteht zwischen dem Anstellwinkel des Flügels $\alpha$ und dem der Fühlfläche $\alpha_H$ der Zusammenhang

$$\alpha_H = \alpha + \varepsilon_H - \bar{\alpha}_w . \qquad (1)$$

Hierin bedeutet $\varepsilon_H$ den Winkel zwischen der Flügelsehne und der Nullauftriebsrichtung der Fühlfläche[2], der auch als Schränkungswinkel bezeichnet wird. Die Größe $\bar{\alpha}_w$ ist der mittlere Abwindwinkel am Ort des Leitwerkes (der Fühlfläche). Er enthält die Beeinflussung des Leitwerkes durch den Flügel. Wir rechnen den Abwindwinkel positiv, wenn er den Anstellwinkel des Leitwerkes verkleinert. Bei gegebenem $\varepsilon_H$ findet man aus $\alpha_H = 0$ den gesuchten Abwindwinkel zu

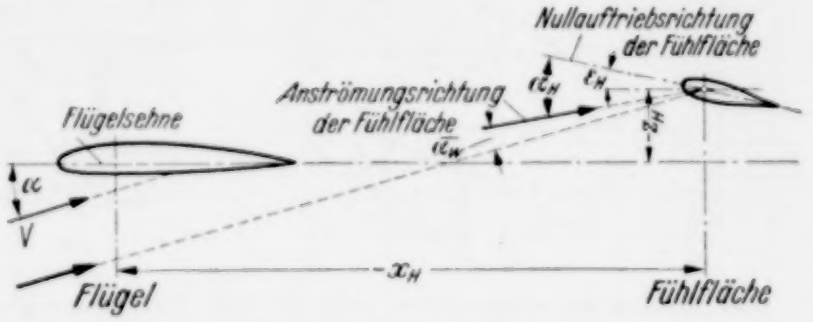


Abb. 3. Erläuterungsskizze. Winkel am Flügel und an der Fühlfläche.

$\alpha$ = Anstellwinkel des Flügels
$\alpha_H$ = Anstellwinkel der Fühlfläche (Höhenleitwerk)
$\bar{\alpha}_w$ = Abwindwinkel am Ort der Fühlfläche (Höhenleitwerk)
$\varepsilon_H$ = Schränkungswinkel = Winkel zwischen Flügelsehne und Nullauftriebsrichtung der Fühlfläche (Höhenleitwerkssehne)

$$\bar{\alpha}_w = \alpha^* + \varepsilon_H . \qquad (2)$$

[1] Dieses ist richtig, wenn man annehmen darf, daß keine Rückwirkung von der Fühlfläche auf den Hauptflügel stattfindet.

[2] Hat die Fühlfläche symmetrisches Profil, dann fällt die Nullauftriebsrichtung mit der Sehne zusammen.

Die Auswahl der zu messenden Anstellwinkel wird so getroffen, daß sich jeweils eindeutige Schnittpunkte für die Momentenkurven $c_M(\alpha)$ mit und ohne Fühlfläche ergeben.

Die Abwindmessungen wurden an einer Reihe von unverwundenen gepfeilten Trapezflügeln gleichen Profiles (NACA 23 012) und annähernd gleichen Seitenverhältnisses ($A = 5$, ohne Endkappen) durchgeführt. Ergänzend wurde noch ein unverwundener ungepfeilter Ellipsenflügel gleichen Profiles hinzugenommen. Die Abmessungen der Flügel gehen aus Tabelle 1 sowie Abb. 4 hervor.

Tabelle 1. *Geometrische Flügeldaten.*

| Zuspitzung $z = \frac{l_a}{l_i}$ | Pfeilwinkel $\varphi$ | Tiefe innen $l_i$ [m] | Tiefe außen $l_a$ [m] | Mittlere Tiefe $l_m$ [m] | Spannweite mit u. ohne Endkappen $b$ [m] | $b'$ [m] | Flügelfläche $F$ [m²] | Seitenverhältnis $A = \frac{b^2}{F}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,2 | 0° 45° | 0,250 | 0,050 | 0,172 | 0,756 | 0,750 | 0,1128 | 5,06 |
| 0,6 | 0° | 0,188 | 0,113 | 0,153 | 0,764 | 0,750 | 0,1135 | 5,16 |
| 1,0 | −30°, 0° 15°, 30° 45° | 0,150 | 0,150 | 0,150 | 0,768 | 0,750 | 0,1146 | 5,18 |
| Ellipse | 0° | 0,191 | 0 | 0,162 | 0,750 | 0,750 | 0,1125 | 5,00 |

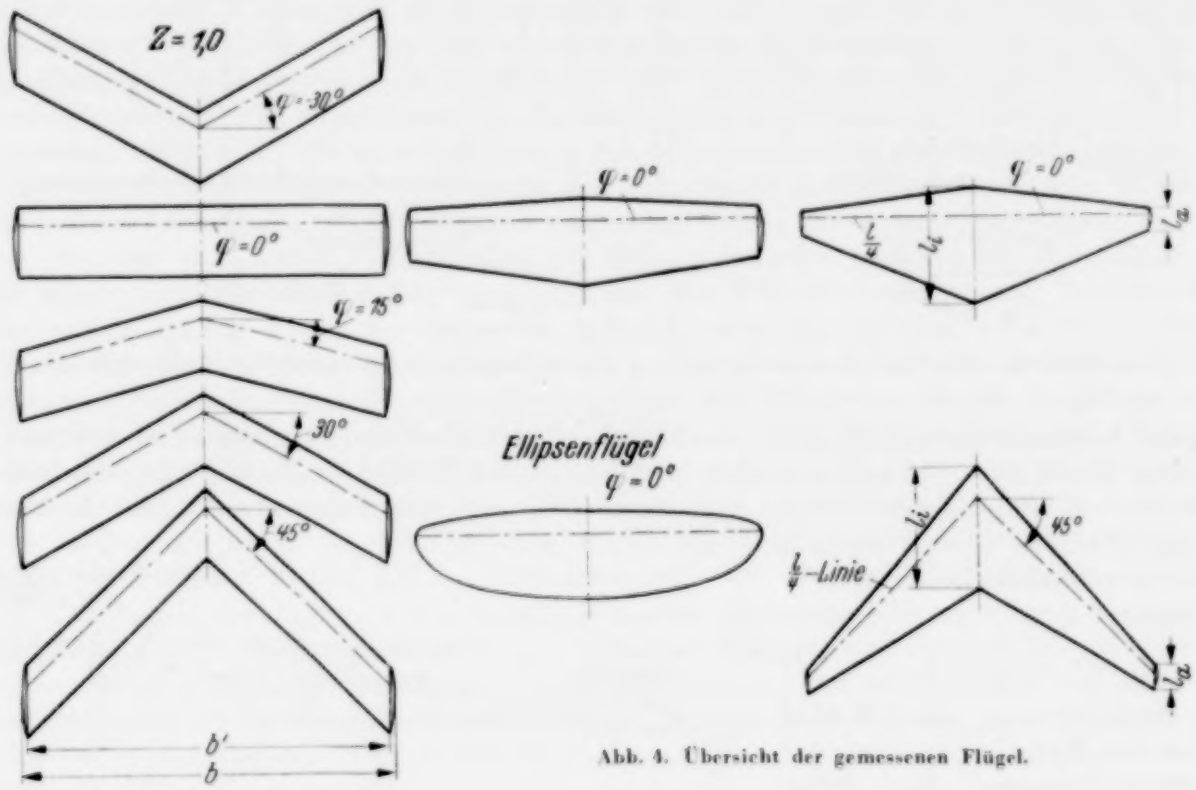


Abb. 4. Übersicht der gemessenen Flügel.

Die Momentenbezugsachse geht jeweils durch den geometrischen Neutralpunkt des Flügels. Unter dem geometrischen Neutralpunkt verstehen wir den Auftriebsschwerpunkt einer Flügelhälfte bei konstanter $c_{a\ \text{örtl}}$-Verteilung und unter der Annahme einer örtlichen Neutralpunktlage auf 25% der örtlichen Flügeltiefe. Für einen Trapezflügel fällt dieser geometrische Neutralpunkt mit dem $l/4$-Punkt im Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte zusammen.

Der Momentenbeiwert ist folgendermaßen definiert:

$$c_M = \frac{M}{q\,F\,l_m}\,. \tag{3}$$

Hierin bedeutet $l_m = \frac{1}{F}\int_{-b/2}^{b/2} l^2(y)\,dy$ die geometrische mittlere Flügeltiefe. Für den Trapezflügel ist $l_m$ gleichbedeutend mit der Tiefe im Flächenschwerpunkt einer Flügelhälfte. Die Zahlenwerte für $l_m$ sind in Tabelle 1 angegeben.

**Als Fühlfläche wird ein Rechteckflügel mit symmetrischem Profil (NACA 0015) verwendet. Die Spannweite der Fühlfläche $b_H$ beträgt $^1/_3$ der Spannweite des Hauptflügels ohne Endkappen**

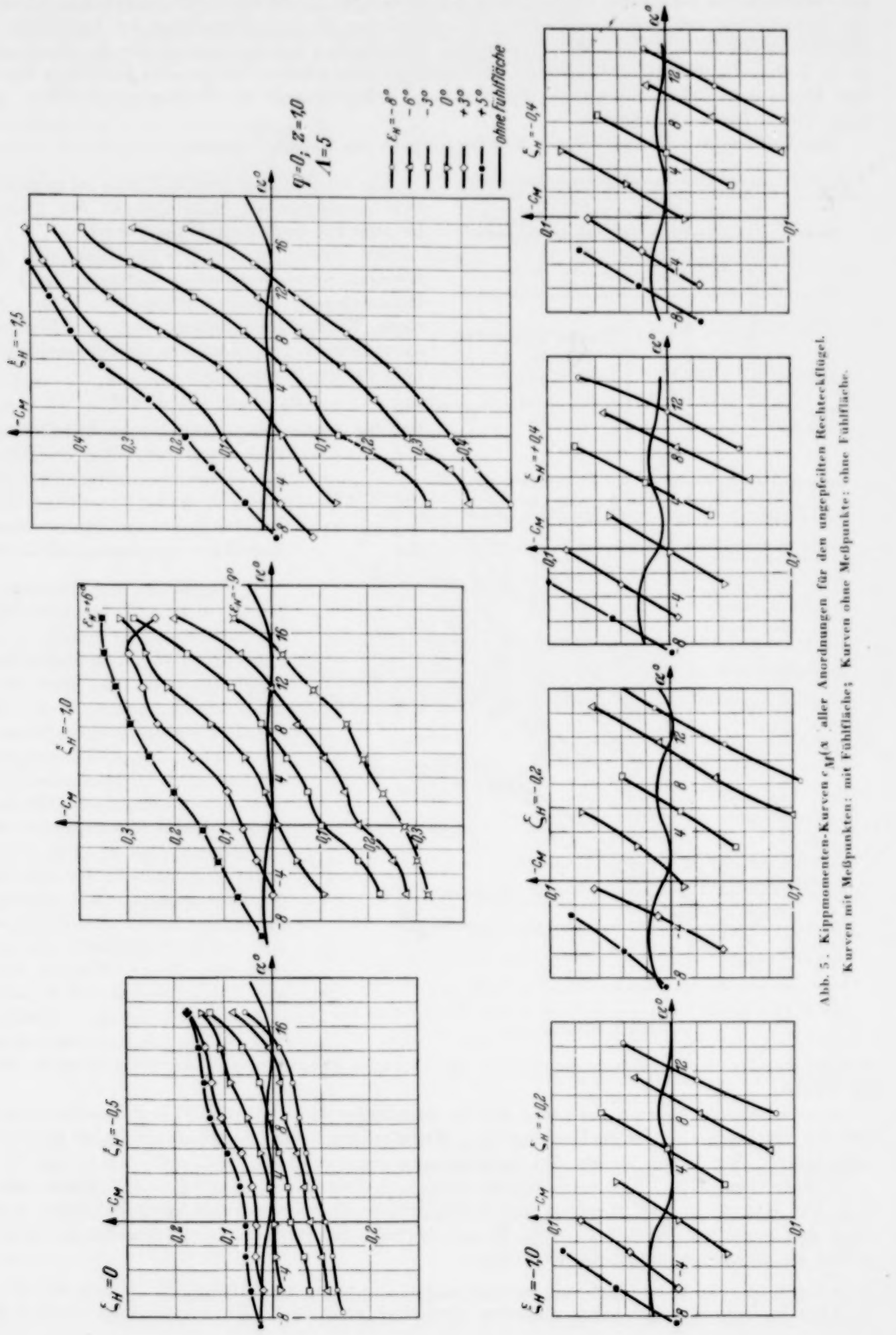


Abb. 5. Kippmomenten-Kurven $c_M(\alpha)$ aller Anordnungen für den ungepfeilten Rechteckflügel. Kurven mit Meßpunkten: mit Fühlfläche; Kurven ohne Meßpunkte: ohne Fühlfläche.

(Abb. 2); es ist somit $b_H = 0{,}250$ m. Die Fläche hat 15% der Fläche des Rechteckflügels. Die Fühlfläche ist mit Endscheiben versehen. Diese Endscheiben tragen Bohrungen, die eine Einstellung der Fühlfläche bei der kleinen Endscheibe in den Hochlagen $\zeta_H = 0$ und $-0{,}2$ ermöglichen; werden die Endscheiben umgekehrt angebracht, so ermöglichen sie eine Einstellung der Fühlfläche in den Hochlagen $\zeta_H = 0$ und $+0{,}2$. Die großen Endscheiben wurden benutzt für die Hochlagen $\zeta_H = \mp 0{,}4$. Die Endscheiben sind auf ein Gestänge aufgeschoben und in jeder beliebigen Rücklage hinter dem Flügel einstellbar. Das Gestänge selbst besteht aus Profilstangen und ist mit dem Flügel fest verbunden.

Der Umfang der durchgeführten Messungen geht aus Tabelle 2 hervor.

Tabelle 2. *Umfang der durchgeführten Messungen.*

| Rücklage $\xi_H = \frac{2x_H}{b'}$ | Fühlflächen-Hochlage $\zeta_H = \frac{2z_H}{b'}$ | Schränkungswinkel $\varepsilon_H$ |
|---|---|---|
| $-0{,}5$ | 0 | jeweils 6 Winkel im Bereich $-9° \leq \varepsilon_H \leq 6°$ |
| $-1{,}0$ | 0<br>$\mp 0{,}2$<br>$\mp 0{,}4$ | |
| $-1{,}5$ | 0 | |

Die Rücklage $\xi_H$ der Fühlfläche ist gemessen vom geometrischen Neutralpunkt des Flügels bis zum Einviertelpunkt der Fühlfläche.

Die Messungen wurden im Windkanal des früheren Aerodynamischen Institutes der T. H. Braunschweig (Strahldurchmesser 1,2 m) bei einer Windgeschwindigkeit von $v = 40$ m/sec durchgeführt. Das entspricht einer *Reynolds*schen Zahl für den Hauptflügel von

$$Re = v\, l_m/\nu = 4 \cdot 10^5 .$$

Bei der Auswertung wurden Anstellwinkel und Widerstand für den endlichen Strahldurchmesser nach den üblichen Methoden[1] korrigiert. Für das Längsmoment wurde keine Korrektur vorgenommen.

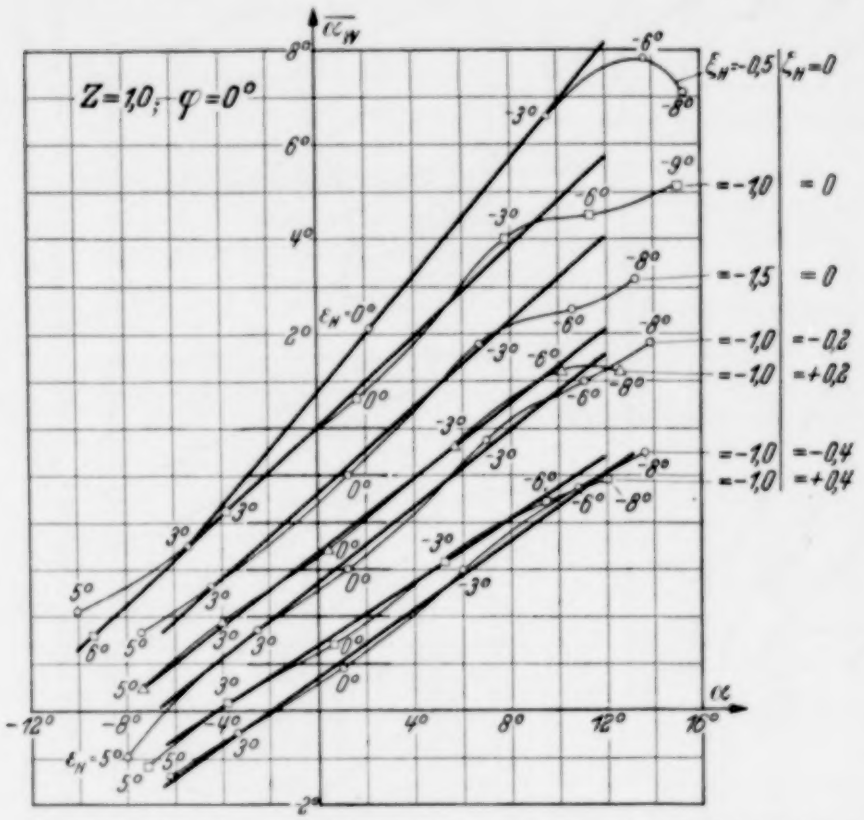


Abb. 6. Abwindwinkel in Abhängigkeit vom Anstellwinkel $\bar{\alpha}_w(\alpha)$ für den ungepfeilten Rechteckflügel.

**3. Ergebnisse der Messungen.** Für das Beispiel des ungepfeilten Rechteckflügels ist in Abb. 5 das Ergebnis einer vollständigen Messung dargestellt. Die ohne Meßpunkte eingetragene Kurve ist jeweils die Momentenkurve ohne Fühlfläche. Für jede Anordnung ergeben sich entsprechend den sechs verschiedenen Schränkungswinkeln sechs Schnittpunkte zur Bestimmung von $\alpha^*$. Aus diesen ergibt sich nach (2) der mittlere Abwindwinkel $\bar{\alpha}_w$. Wir erhalten auf diese Weise Auftragungen $\bar{\alpha}_w(\alpha)$[2]. Für das Beispiel des ungepfeilten Rechteckflügels zeigt Abb. 6 das Ergebnis. Wir haben an dieser Stelle darauf verzichtet, für alle Flügel die den Abb. 5 und 6 entsprechenden Auftragungen anzugeben und verweisen hierfür auf die Originalarbeit von H. *Trienes*.

Aus den Auftragungen $\bar{\alpha}_w(\alpha)$ haben wir die Steigungen $d\bar{\alpha}_w/d\alpha$ bestimmt und diese in Abb. 7 über der Rücklage $-\xi_H$ für die Hochlage $\zeta_H = 0$ und in Abb. 8 über der Hochlage $\zeta_H$ für $\xi_H = -1$ aufgetragen. Wir haben jeweils drei Auftragungen vorgenommen:

a) Zuspitzung $\boldsymbol{Z} = 1{,}0$; $\varphi$ veränderlich; b) $\varphi = 0$; $Z$ veränderlich; c) $\varphi = 45°$; $Z$ veränderlich. Die Kurven in Abb. 8 zeigen eine systematische Unsymmetrie bei entsprechenden positiven und negativen Werten $\zeta_H$. Die Werte oberhalb der $\xi$-Achse ($\zeta_H < 0$) sind immer etwas größer als diejenigen unterhalb der $\xi$-Achse.

[1] Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, II. Lieferung.

[2] Der Einfachheit halber haben wir fortan geschrieben $\alpha^* \equiv \alpha$.

Bereits in der Einleitung sind wir auf die flugtechnische Bedeutung der Abwindmessungen eingegangen. Es sei an dieser Stelle noch kurz angegeben, in welcher Form die von uns gemessenen Abwindwinkel in die Momentenbilanz des Flugzeuges eingehen.

Ist uns der Abstand des Höhenleitwerkes (Einviertelpunkt) hinter dem Flugzeugschwerpunkt mit $r_H$ gegeben, dann erzeugt das Leitwerk den Momentenbeitrag

$$M_H = - c_{a\,H}\, q_H\, F_H\, r_H\,. \qquad (4)$$

Der Index $H$ gibt an, daß es sich um die Größen des Höhenleitwerkes handelt. Ist uns der Auftriebsanstieg des Leitwerkes $dc_{aH}/d\alpha_H$ bekannt, dann können wir, wenn wir noch den dimensionslosen Beiwert nach (3) einführen, für (4) auch schreiben

$$c_{M\,H} = - \frac{q_H}{q}\,\frac{F_H}{F}\,\frac{r_H}{l_m}\,\frac{dc_{a\,H}}{d\alpha_H}\,\alpha_H\,. \qquad (5)$$

In dieser Gleichung ist uns der Anstellwinkel des Leitwerkes $\alpha_H$ durch (1) gegeben. Den Beitrag des Höhenleitwerkes zur Stabilität um die Querachse erhält man durch Differentiation von (5) nach dem Auftriebsbeiwert des Gesamtflugzeuges. Dieses ergibt die Verschiebung des Gesamtneutralpunktes durch das Leitwerk

$$\frac{dc_{M\,H}}{dc_a} = \left(\frac{\Delta x_N}{l_m}\right)_H = - \frac{q_H}{q}\,\frac{F_H}{F}\,\frac{r_H}{l_m}\,\frac{dc_{a\,H}}{d\alpha_H}\,\frac{d\alpha_H}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{dc_a}\,. \qquad (6)$$

Wir haben dabei angenommen, daß das Staudruckverhältnis $q_H/q$ vom Anstellwinkel unabhängig ist. Die entscheidende Größe in (6), die den Einfluß des Flügels auf das Leitwerk wiedergibt, ist außer im Staudruckverhältnis $q_H/q$ im Wert $d\alpha_H/d\alpha$ enthalten, den wir unter Beachtung von (1) wie folgt aus unseren Messungen finden:

$$\frac{d\alpha_H}{d\alpha} = 1 - \frac{d\bar{\alpha}_w}{d\alpha}\,. \qquad (7)$$

Wenn wir jetzt annehmen, daß sich das Leitwerk jeweils vom geometrischen Neutralpunkt aus gemessen gleich weit hinter dem Flügel befindet, dann können wir aus Abb. 7 und 8 in Übereinstimmung mit dem in der Einleitung Gesagten folgendes bezüglich des Stabilitätsbeitrages des Leitwerkes feststellen:

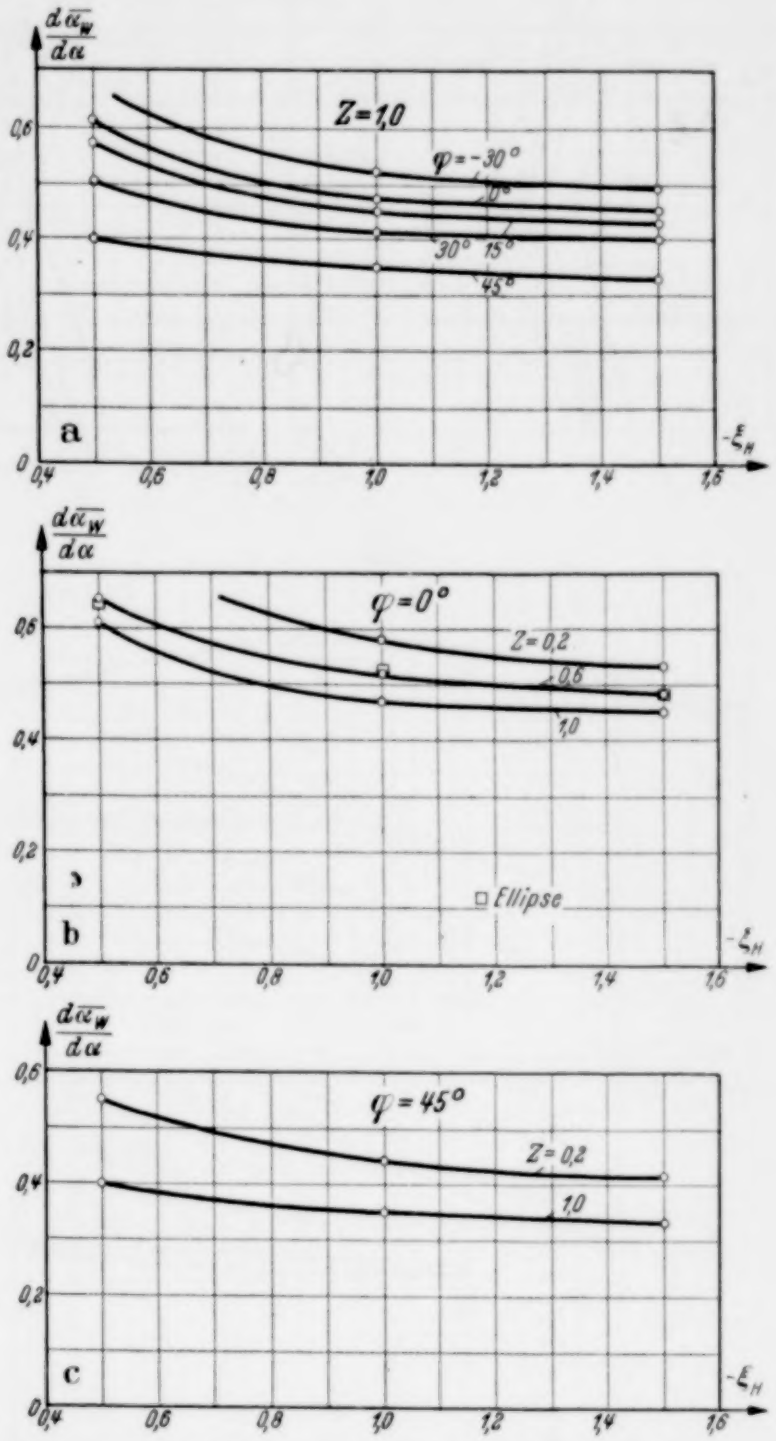


Abb. 7. Der Abwindanstieg $d\bar{\alpha}_w/d\alpha$ in Abhängigkeit von der Rücklage $-\xi_H$ bei der Hochlage $\zeta_H = 0$; $\Lambda = 5$.

1) Bei gleicher Zuspitzung ($Z = 1{,}0$ und $Z = 0{,}2$) rückt der Neutralpunkt bei zunehmender Rückwärtspfeilung nach hinten. Für die gemessenen Flügel vom Seitenverhältnis $\Lambda = 5$ ist die Neutralpunktverschiebung bei einem um 45° nach hinten gepfeilten Flügel gegenüber einem ungepfeilten Flügel um etwa 25% größer. Bei Vorwärtspfeilung liegen die Verhältnisse umgekehrt.

2) Bei gleicher Pfeilung ($\varphi = 0$ und $\varphi = 45°$) ergibt das Leitwerk, wenn es sich hinter dem am meisten zugespitzten Flügel befindet, die kleinste Neutralpunktverschiebung. Sie beträgt

bei einem Seitenverhältnis von $\Lambda = 5$ für den Flügel $Z = 0{,}2$ etwa 25% weniger als beim Rechteckflügel ($Z = 1{,}0$).

Wie bereits gesagt, wurden sämtliche Messungen gewonnen mit Flügeln vom Seitenverhältnis $\Lambda \approx 5$. Wir können den Einfluß des Seitenverhältnisses näherungsweise beseitigen, wenn

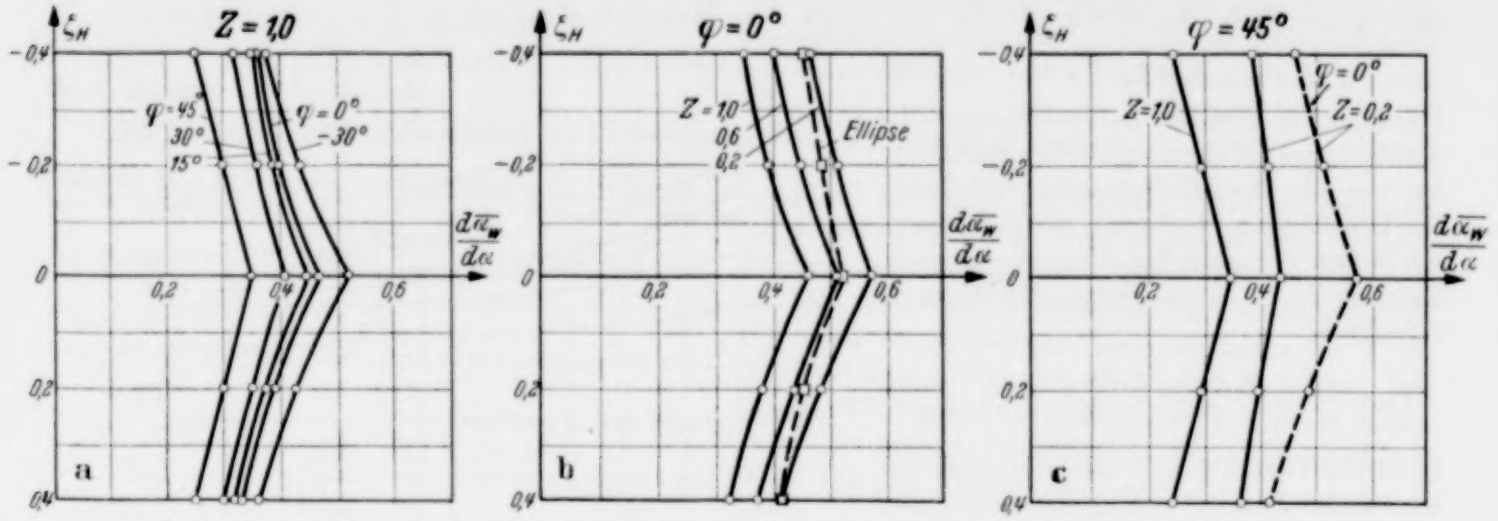


Abb. 8. Der Abwindanstieg $d\bar{\alpha}_w/d\alpha$ in Abhängigkeit von der Hochlage $\zeta_H$ bei der Rücklage $\xi_H = -1$; $\Lambda = 5$.

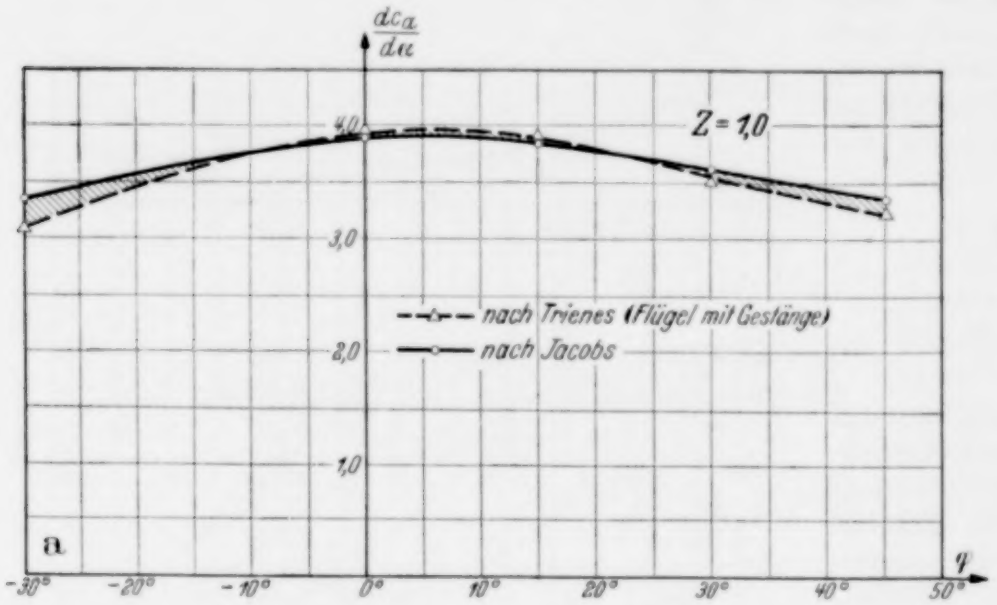


Abb. 9. Auftriebsanstiege $dc_a/d\alpha$ der verschiedenen Flügel
a) in Abhängigkeit vom Pfeilwinkel $\varphi$. b) in Abhängigkeit von der Zuspitzung $Z$.

wir die gemessenen Abwindwinkel durch den induzierten Anstellwinkel bei elliptischer Auftriebsverteilung, d. i. $c_a/\pi\Lambda$ ($c_a$ = Gesamtauftriebsbeiwert) dividieren. Wir schreiben also

$$\frac{\bar{\alpha}_w}{c_a/\pi\Lambda} = \frac{d\bar{\alpha}_w}{d\alpha}\,\frac{\pi\Lambda}{dc_a/d\alpha}. \qquad (8)$$

Hierin bedeutet $dc_a/d\alpha$ den Auftriebsanstieg des jeweiligen Flügels. In Abb. 9 haben wir diese Werte nach den Messungen von *H. Trienes* (Flügel + Gestänge) und nach den Messungen von *W. Jacobs*[1] miteinander verglichen. Wir haben das arithmetische Mittel aus beiden Werten genommen und damit die Werte von $\pi\Lambda/(dc_a/d\alpha)$ nach Tabelle 3 bestimmt. Die hiermit nach (8) aus Abb. 7 und 8 ermittelten Werte von $\bar{\alpha}_w/(c_a/\pi\Lambda)$ sind in Abb. 10 über dem Zuspitzungsverhältnis $Z$ aufgetragen: und zwar im oberen Teil für die Rücklage

$$\xi_H = -1{,}0$$

und die Hochlagen

$\zeta_H = 0$, $\mp 0{,}2$ und $\mp 0{,}4$;

[1] Siehe Fußnote 5 von S. 26.

und im unteren Teil für die Rücklage $\xi_H = -1{,}5$ und die Hochlage $\zeta_H = 0$. Mit Annäherung an den Rechteckflügel ($Z = 1{,}0$) nehmen die Abwindwinkel ab. Zum Vergleich haben wir auch noch die Meßwerte des Ellipsenflügels miteingetragen. In Abb. 11 haben wir die Werte $\bar{\alpha}_w/(c_a/\pi\Lambda)$ über dem Pfeilwinkel $\varphi$ für die Rücklage $\xi_H = -1$ und die Hochlagen $\zeta_H = 0; \mp 0{,}2$ und $\mp 0{,}4$ dargestellt. Mit größer werdender Rückwärtspfeilung nehmen die Abwindwinkel ab.

**4. Vergleich mit der Theorie.** Wir wollen jetzt die experimentell gefundenen Werte mit theoretischen Rechnungen vergleichen. Die von *E. Truckenbrodt*[1] angegebene Näherungsformel zur Berechnung des Abwindes von ungepfeilten Flügeln, wollen wir auf den gepfeilten Flügel ausdehnen. Dabei wollen wir uns auf den Fall beschränken, wo die Aufpunkte $(\xi_H, \zeta_H)$ sich innerhalb der Wirbelschicht ($\zeta = 0$) befinden. Zur Berechnung des Abwindwinkels einer beliebig geformten tragenden Wirbellinie greifen wir auf eine Formel von *H. Multhopp*[2] zurück, die wir für unsere Zwecke wie folgt schreiben:

Tabelle 3. *Werte von* $\pi\Lambda/(dc_a/d\alpha)$.

| $Z$ \ $\varphi$ | −30° | 0° | 15° | 30° | 45° |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,2 | — | 4,26 | — | — | 4,56 |
| 0,6 | — | 4,25 | — | — | — |
| 1,0 | 5,04 | 4,16 | 4,21 | 4,56 | 4,96 |
| Ellipse | — | 4,11 | — | — | — |

$$\alpha_w(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ 2\left(1 - \frac{\xi}{|\xi|}\right) \frac{\gamma(\eta)}{\varepsilon} - \oint_{-1}^{+1} \frac{L(\xi, \eta, \eta')}{(\eta - \eta')^2} \gamma(\eta')\, d\eta' \right]. \tag{9}$$

Hierin bedeutet $\gamma(\eta) = \Gamma(\eta)/vb$ die dimensionslose Auftriebsverteilung längs Spannweite und $L(\xi, \eta, \eta')$ eine Einflußfunktion, die sich zu

$$L(\xi, \eta, \eta') = 1 - \frac{\xi - \xi'}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2}} \tag{10}$$

berechnet. Dabei sind $\xi, \eta$ die Koordinaten des Aufpunktes, und $\xi' = \xi'(\eta')$ ist die Lage der tragenden Linie (Abb. 12).

Nehmen wir einen Pfeilflügel an, bei dem die tragende Linie (Einviertelpunktlinie) auf jeder Flügelhälfte eine gerade Linie bildet, dann können wir für die Einflußfunktion schreiben

$$L(\xi, \eta, \eta') = 1 - \frac{\xi_a - (\eta_a - |\eta'|)\,\mathrm{tg}\varphi}{\sqrt{[\xi_a - (\eta_a - |\eta'|)\,\mathrm{tg}\varphi]^2 + (\eta - \eta')^2}} \tag{11}$$

Die neuen Bezeichnungen $\xi_a$ und $\eta_a$ gehen aus Abb. 12 hervor. Unter $\eta_a$ wollen wir den seitlichen Abstand des Auftriebsschwerpunktes einer Flügelhälfte (aerodynamischer Neutralpunkt) verstehen[3]; er berechnet sich zu

$$\eta_a = \frac{\int_0^1 \gamma(\eta)\, \eta\, d\eta}{\int_0^1 \gamma(\eta)\, d\eta}. \tag{12}$$

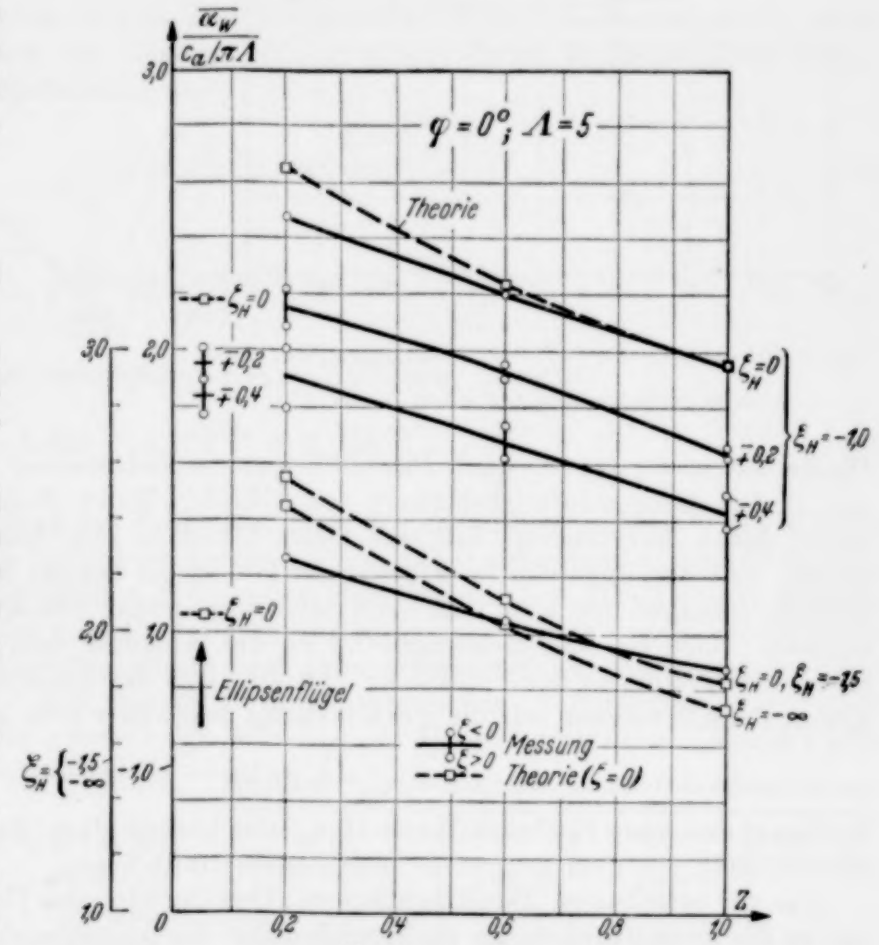


Abb. 10. Die Abwindwerte $\frac{\bar{\alpha}_w}{c_a/\pi\Lambda}$ in Abhängigkeit von der Zuspitzung $Z$; Pfeilwinkel $\varphi = 0$; $\Lambda = 5$.

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 26. [2] Siehe Fußnote 3 von S. 26.
[3] Wir wollen im Folgenden immer annehmen, daß die Auftriebsverteilung zu $\eta = 0$ symmetrisch ist.

Entsprechend soll auch die Lage des Aufpunktes in $\xi$-Richtung ($\xi_a$) vom Neutralpunkt aus gemessen werden.

Wir entwickeln jetzt Gleichung (11) in eine *Taylor*sche Reihe nach $\operatorname{tg}\varphi$ und finden bei Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung

$$L(\xi, \eta, \eta') = 1 - \frac{\xi_a}{\sqrt{\xi_a^2 + (\eta - \eta')^2}} + \frac{(\eta_a - |\eta'|)(\eta - \eta')^2}{\sqrt{\xi_a^2 + (\eta - \eta')^2}^3} \operatorname{tg}\varphi \,. \tag{13}$$

Nehmen wir jetzt an, daß $\xi_a^2 \gg (\eta - \eta')^2$, dann können wir noch weiter vereinfachen und finden

$$L(\xi, \eta, \eta') = 1 - \frac{\xi_a}{|\xi_a|} + \frac{1}{2}\frac{\xi_a}{|\xi_a|^3}(\eta - \eta')^2 + \frac{\eta_a - |\eta'|}{|\xi_a|^3}(\eta - \eta')^2 \operatorname{tg}\varphi \,. \tag{14}$$

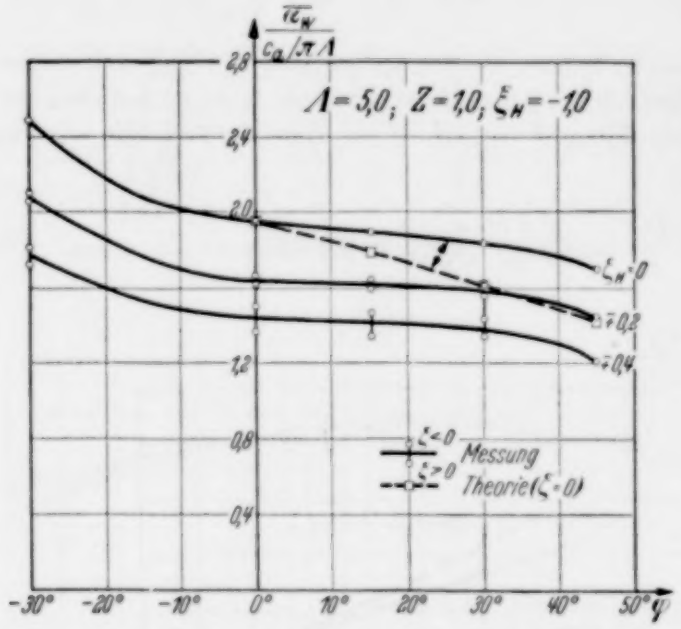


Abb. 11. Die Abwindwerte $\frac{\overline{\alpha_w}}{c_a/\pi\Lambda}$ in Abhängigkeit vom Pfeilwinkel $\varphi$; Rechteckflügel, $Z = 1{,}0$; $\Lambda = 5$.

Wir setzen diesen Ausdruck in (9) ein und erhalten nach einer entsprechenden Rechnung, wie sie schon in der zitierten Arbeit von *E. Truckenbrodt* durchgeführt worden ist, das folgende Ergebnis:

$$\alpha_w(\xi, \eta) = \left(1 - \frac{\xi_a}{|\xi_a|}\right)\alpha_i(\eta) - \frac{1}{4}\frac{\xi_a}{|\xi_a|^3}\frac{c_a}{\pi\Lambda} \,. \tag{15}$$

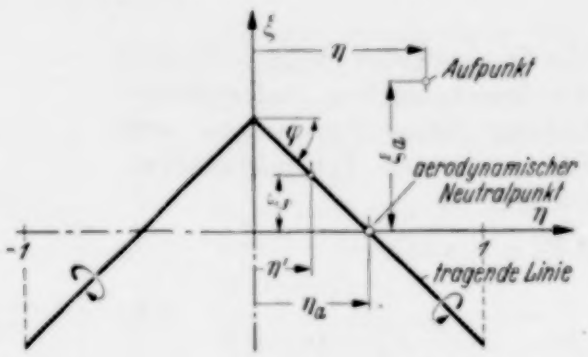


Abb. 12. Erläuterungsskizze.

Hierin bedeutet $\alpha_i(\eta)$ den nach *Prandtl* bekannten induzierten Anstellwinkel am Ort des Flügels und $c_a$ den Gesamtauftriebsbeiwert des Flügels. Unter Beachtung von (12) können wir uns leicht davon überzeugen, daß das letzte Glied in (14) keinen Beitrag zum Abwindwinkel liefert. Für den ungepfeilten Flügel geht (15) in die bereits bekannte Formel über. Der maßgebliche Abstand ist also vom Auftriebsschwerpunkt (Neutralpunkt) bis zum Aufpunkt zu nehmen. Nach unseren Messungen ist $\xi_H$ der Abstand vom geometrischen Neutralpunkt bis zum Einviertelpunkt der Fühlfläche. Ist die Lage des aerodynamischen Neutralpunktes $\eta_a$ bekannt, dann errechnen wir die Verschiebung gegenüber dem geometrischen Neutralpunkt $\eta_s$ zu

$$\Delta\xi_a = (\eta_s - \eta_a) \operatorname{tg}\varphi \,. \tag{16}$$

Bei den gemessenen Rechteckflügeln ist $\eta_a$ stets kleiner als $\eta_s$; daraus folgt also, daß der Auftriebsschwerpunkt vor dem geometrischen Neutralpunkt liegt.

Aus der erweiterten Traglinientheorie (Dreiviertelpunkt-Theorie) ist bekannt, daß zur Festlegung des Anstellwinkels, im vorliegenden Fall des Anstellwinkels der Fühlfläche, der Punkt auf 75% der Flügeltiefe maßgeblich ist (*Pistolesi*sches Theorem). Die von uns gemessenen Abwindwinkel gehören also zu den Rücklagen

$$\xi = \xi_H - \frac{l_H}{b} = \xi_H - 0{,}091 \,. \tag{17}$$

Fügen wir noch den Anteil aus (16) hinzu, dann erhalten wir für den in Formel (15) benötigten Abstand

$$\xi_a = \xi_H - \frac{l_H}{b} - (\eta_s - \eta_a) \operatorname{tg}\varphi \,. \tag{18}$$

Den Vergleichswert des Abwindwinkels mit der Messung ($\xi_a < 0$) erhalten wir als Mittelwert über die Fühlflächenspannweite. Nach (15) ergibt sich dann

$$\bar{\alpha}_w = \frac{2}{\eta_0} \int_0^{\eta_0} \alpha_i(\eta)\, d\eta + \frac{1}{4\,\xi_a^2} \frac{c_a}{\pi A}, \tag{19}$$

wobei $\eta_0 = 2\,y_0/b = 1/3$ das Spannweitenverhältnis der Fühlfläche zum Hauptflügel darstellt.

Zur Berechnung von $\alpha_i$ ist die genaue Kenntnis der Auftriebsverteilung erforderlich. Nehmen wir an, daß uns diese längs Spannweite durch den *Fourier*schen Reihenansatz

$$\gamma = \frac{\Gamma}{b\,v} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sin{(2n+1)\,\vartheta} \tag{20}$$

gegeben ist, wobei $\vartheta$ durch die Beziehung

$$\eta = \frac{2\,y}{b} = \cos\vartheta \tag{21}$$

definiert ist, dann können wir den induzierten Anstellwinkel in bekannter Weise berechnen.

$$\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, a_{2n+1} \frac{\sin{(2n+1)\,\vartheta}}{\sin\vartheta}. \tag{22}$$

Führen wir jetzt unter Beachtung von (21) die Integration nach (19) aus, dann erhalten wir, wenn wir noch berücksichtigen, daß sich der Gesamtauftriebsbeiwert durch Integration der Zirkulationsverteilung (20) über die Spannweite zu

$$c_a = A \int_{-1}^{1} \gamma\, d\eta = \pi A\, a_1 \tag{23}$$

berechnet,

$$\frac{\bar{\alpha}_w}{c_a/\pi A} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos{(2n+1)\vartheta_0}}{\cos\vartheta_0} \frac{a_{2n+1}}{a_1} + \frac{1}{4\,\xi_a^2}. \tag{24}$$

Für unseren Fall mit $\eta_0 = 1/3$ und entsprechend $\vartheta_0 = 70{,}5^\circ$ gilt

$$\frac{\bar{\alpha}_w}{c_a/\pi A} = 2{,}000 - 5{,}116\,\frac{a_3}{a_1} + 5{,}948\,\frac{a_5}{a_1} + \frac{0{,}250}{\xi_a^2}. \tag{24a}$$

Auf eine theoretische Behandlung des Problems, wenn die Aufpunkte außerhalb der Wirbelschicht liegen, soll an dieser Stelle verzichtet werden. Die in (24a) auftretenden *Fourier*-Koeffizienten entnehmen wir für den ungepfeilten Flügel einer unveröffentlichen Arbeit von *H. Schlichting* und *W. Kahlert*, diejenigen des gepfeilten Rechteckflügels einer Arbeit von *W. Mutterperl*[1]. In beiden Fällen wurde die Auftriebsverteilung nach einer erweiterten Traglinientheorie (Dreiviertelpunktmethode) berechnet. Ein Vergleich der theoretischen Auftriebsverteilung nach *Mutterperl* mit den Messungen von *Jacobs* zeigt befriedigende Übereinstimmung. Tabelle 4 gibt eine Zusammenstellung der benötigten Zahlenwerte.

Tabelle 4. *Fourier-Koeffizienten der Auftriebsverteilung.*

| $A$ | $\varphi$ | $Z$ | $a_3/a_1$ | $a_5/a_1$ | $\eta_s - \eta_a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0,2 | —0,0651 | 0,0193 | |
| | 0° | 0,6 | 0,0125 | 0,0151 | — |
| | | 1,0 | 0,0581 | 0,0050 | |
| 5 | 0° | | 0,0581 | 0,0050 | 0,061 |
| | 15°[2] | 1,0 | 0,083 | 0,000 | 0,055 |
| | 30° | | 0,1135 | —0,0025 | 0,046 |
| | 45° | | 0,1535 | —0,0010 | 0,036 |

In Abb. 10 haben wir die nach (24a) ermittelten theoretischen Werte für $\xi_H = -1{,}0$; $-1{,}5$ und $-\infty$ dargestellt. Es zeigt sich, daß die Übereinstimmung bei dem Rechteckflügel nahezu vollkommen ist. Bei den zugespitzten Flügeln ($Z = 0{,}2$) ergeben sich einige Abweichungen, die wohl im wesentlichen darauf beruhen, daß die erweiterte Traglinientheorie Auftriebsverteilungen liefert, die für unsere Zwecke nicht genau genug sind. Wir folgern dieses aus der Tatsache, daß für $\xi_H = -1{,}5$ die gemessenen Abwindwinkel kleiner sind als die theoretischen für $\xi_H = -\infty$, was theoretisch nicht möglich sein dürfte.

[1] *W. Mutterperl*, NACA Tech. Note 834 (1941).
[2] Interpolierte Werte.

In Abb. 11 zeigt die theoretische Kurve mit zunehmender Pfeilung größere Abweichungen gegenüber der Meßkurve. Bei $\varphi = 45°$ beträgt der Fehler etwa 20%. Der Grund hierfür muß wohl auch darin gesehen werden, daß die zugrundegelegte Auftriebsverteilung des Pfeilflügels den Genauigkeitsansprüchen einer Abwindrechnung noch nicht völlig genügt.

**5. Zusammenfassung.** Es wird über Abwindmessungen hinter gepfeilten Flügeln berichtet, die mittels der Fühlflächenmethode ausgeführt wurden. Die Messungen vermitteln einen guten Überblick über den Beitrag des Höhenleitwerkes zur Stabilität um die Querachse bei gepfeilten und zugespitzten Flügeln. Befindet sich das Leitwerk in gleichem Abstand vom geometrischen Neutralpunkt hinter dem Flügel, dann ist der Beitrag des Leitwerkes zur Stabilität um die Querachse um so größer, je stärker der Flügel bei gleicher Zuspitzung nach hinten gepfeilt ist. Bei Vorwärtspfeilung ergibt sich das umgekehrte Ergebnis. Je größer die Zuspitzung ist, um so kleiner wird bei sonst gleicher Pfeilung der stabilisierende Beitrag des Höhenleitwerkes. Die Messungen werden mit theoretischen Rechnungen verglichen.

(Eingegangen am 13. Juni 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*, Braunschweig, Technische Hochschule, Institut für Strömungsmechanik.

# Turbulente Strömungen in konvergenten Kanälen.

Von W. Szablewski.

**1. Einleitung.** Für die scheinbare durch den Vorgang der turbulenten Mischung erzeugte Schubspannung hat *L. Prandtl*[1] im Jahre 1925 den bekannten hypothetischen Ansatz

$$\tau = \varrho\, l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \frac{\partial u}{\partial y}$$

mit dem Mischungsweg $l$ aufgestellt. (Bei Betrachtung einer Grenzschichtströmung bedeuten dabei in üblicher Weise $x$ die Bogenlänge der Körperkontur, $y$ den Wandabstand, $u$, $v$ die Geschwindigkeitskomponenten in $x$- und $y$-Richtung, $\varrho$ die Dichte, $\mu$ die Zähigkeit, $\nu = \mu/\varrho$ die kinematische Zähigkeit, $p\,(x)$ den statischen Druck, $\tau$ die Schubspannung.) In zwei neueren Arbeiten hat der Verfasser[2] auf der Grundlage des *Prandtl*schen Ansatzes die turbulente Strömung im Rohr und längs der ebenen Platte in allen charakteristischen Einzelheiten in guter Näherung berechnen können. In der vorliegenden Untersuchung werden als weiteres wichtiges Strömungsmodell die turbulenten Strömungen in konvergenten Kanälen behandelt. Eine rationelle Theorie dieses Modells ist, soweit dem Verfasser bekannt, bisher noch nicht gegeben worden. Wir schildern zunächst die in den Arbeiten über das Rohr und die ebene Platte zur Anwendung gekommene Methode des Rechenganges.

Die Differentialgleichungen der turbulenten Grenzschicht

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

werden von der Wand her in zwei Schritten integriert. Die so gewonnene Funktion für die Geschwindigkeitsverteilung dient im übrigen Bereich der Grenzschicht als Approximation. Wandschubspannung $\tau_0$ und Grenzschichtdicke $\delta$, die in der Funktion in Form von Parametern auftreten, werden dann mittels der Randbedingung $u = u_1$ ($u_1$ Potentialströmung am Rande der Grenzschicht) und des Impulssatzes bestimmt.

Die genannten zwei Integrationsschritte können folgendermaßen charakterisiert werden: Der erste Integrationsschritt ist, wie in Abschn. 2 noch näher ausgeführt werden wird, gekennzeichnet durch die Annahme konstanter Schubspannung $\tau \approx \tau_0$ und in bezug auf den turbulenten Mischungsvorgang durch den modifizierten *Prandtl*schen Ansatz

$$l \approx \varkappa\,(y - \delta_0) \qquad (\approx \text{angenähert})$$

($\delta_0$ Dicke der laminaren Unterschicht).

Der erste Integrationsschritt erstreckt sich über die laminare Unterschicht, den Bereich gleicher Größenordnung von laminarer und turbulenter Reibung bis in den Bereich der (überwiegend) turbulenten Reibung hinein. Für diesen letzteren Bereich nimmt die berechnete Geschwindigkeitsverteilung die bekannte Gestalt des logarithmischen Verteilungsgesetzes an.

Die so erhaltene Lösung wird dann im zweiten Integrationsschritt weiter in den Bereich der turbulenten Reibung der Grenzschicht hinein fortgesetzt. Dieser zweite Schritt ist gekennzeichnet durch Vernachlässigung der laminaren Reibung, in bezug auf den Vorgang der turbulenten Mischung durch den Ansatz

$$\frac{l}{\delta} \approx \varkappa\frac{y}{\delta} + \mu\left(\frac{y}{\delta}\right)^2.$$

Bei diesem zweiten Schritt wird dem Einfluß der Trägheits- und Druckkräfte, die beim ersten Schritt entsprechend der Annahme $\tau \approx \tau_0$ vernachlässigt wurden, in erster Näherung Rechnung getragen.

Als empirische Koeffizienten treten in der analytischen Entwicklung, dem derzeitigen Stand der Theorie gemäß, die Koeffizienten $\varkappa$, $\mu$ der Mischungswegverteilung auf, ferner die dimensionslos gemachte Dicke der laminaren Unterschicht $v_*\delta_0/\nu$, wobei $v_* = \sqrt{\tau_0/\varrho}$ die sogenannte Schub-

[1] *L. Prandtl*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 137.
[2] *W. Szablewski*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 131 sowie S. 309.

spannungsgeschwindigkeit ist. Diese Koeffizienten besitzen leider keinen universellen Charakter, sondern sind als von der Zähigkeit abhängige Größen anzusehen. Immerhin wird für sehr große *Reynolds*sche Zahlen nach den Messungen *Nikuradses*[1] der Zähigkeitseinfluß sehr gering. Des weiteren ist eine Abhängigkeit vom Druckgradienten der Grenzschicht denkbar. Sehr wesentlich ist hier das Ergebnis, daß die Koeffizienten des ersten Integrationsschrittes $\varkappa$ und $v_* \, \delta_0/\nu$ vom Druckgradienten der Grenzschicht unabhängig sind! Den experimentellen Nachweis für diesen Sachverhalt haben neuerdings *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*[2] erbracht. Für große *Re*-Zahlen kann man demgemäß diese Koeffizienten als „universelle" Konstanten ansprechen.

Bei der Untersuchung der hier behandelten turbulenten Strömungen in konvergenten Kanälen ergibt sich nun, daß bereits mittels des im ersten Integrationsschritt zu gewinnenden logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes alle wesentlichen Merkmale der Strömung in guter Approximation berechnet werden können. (Es ist anzunehmen, daß sich entsprechend einfach allgemein turbulente Grenzschichten mit Druckabfall behandeln lassen.) Bei den verzögerten Strömungen in divergenten Kanälen wird es allerdings erforderlich sein, den oben erwähnten zweiten Integrationsschritt zu vollziehen.

Als experimentelle Unterlagen dienen der Untersuchung die bekannten Messungen von *J. Nikuradse*[3]. Leider — in Hinsicht auf eine zu entwickelnde Theorie der turbulenten Grenzschichten für große *Re*-Zahlen — liegen diese Messungen bei verhältnismäßig kleinen *Reynolds*schen Zahlen ($Re = u_1 \, b/\nu \approx 70000$, $b$ Kanalbreite).

**2. Das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz in der Reibungszone turbulenter Grenzschichten[4].** Während im allgemeinen in der Grenzschicht einer Strömung definitionsgemäß die Trägheitskräfte von derselben Größenordnung sind wie die Reibungs- und Druckkräfte, stirbt nach der Wand hin zu die Bewegung wegen der Haftbedingung ab. Dagegen nimmt die Reibung hier infolge des sehr steilen Geschwindigkeitsanstieges beträchtliche Werte an. In einer der Wand anliegenden schmalen Zone werden wir daher die Trägheitskräfte gegenüber den Reibungs- und Druckkräften vernachlässigen können. Die Bewegungsgleichung einer Grenzschicht

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{I}$$

reduziert sich dann für diese Zone auf

$$-\frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \,, \tag{II}$$

aus der

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y \tag{III}$$

folgt. Hierbei ist

$$\left.\begin{aligned} &\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb} \\ &\text{mit} \\ &\tau_{lam} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \tau_{turb} = \varrho \, l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 . \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

Beschränken wir uns auf hinreichend kleine Wandabstände, so können wir, $\tau_0 \neq 0$ vorausgesetzt, noch in (III) den Einfluß des Druckgradienten vernachlässigen und

$$\tau \approx \tau_0 \tag{V}$$

setzen, also konstante Schubspannung annehmen[5]. Bei hinreichend kleinen Wandabständen ergibt demnach die erste Integration von (I)

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \varrho \, l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \tau_0 \,. \tag{VI}$$

---

[1] *J. Nikuradse*, Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. VDI-Forschungsheft 356 (1932).

[2] *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 288.

[3] *J. Nikuradse*, Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. VDI-Forschungsheft 289 (1929).

[4] Die Ausführungen dieses Abschnitts decken sich teilweise mit den Darlegungen von *J. Rotta*. Ing.-Arch. 18 (1950), S. 277.

[5] Diese Feststellung hat erstmalig *L. Prandtl* bei der Behandlung der turbulenten Rohrströmung getroffen. Ergebn. d. AVA, Göttingen, IV. Lfg. (1932), S. 18.

Für den Mischungsweg $l$ kann man nach *Prandtl* in Wandnähe aus dimensionsanalytischen Gründen

$$l = \varkappa y$$

setzen. Trägt man dem Umstand Rechnung, daß auch turbulente Grenzschichten in unmittelbarer Nähe der Wand einen laminaren Strömungsbereich, die sogenannte laminare Unterschicht, besitzen, so ist dieser Ansatz zu modifizieren in

$$l = \varkappa (y - \delta_0) . \qquad \text{(VII}^1\text{)}$$

Die weitere Integration läßt sich dann unschwer durchführen. Man erhält eine Geschwindigkeitsverteilung, die innerhalb der gekennzeichneten Zone für „nicht zu kleine" Wandabstände zu einem logarithmischen Geschwindigkeitsgesetz führt, wie es zuerst *L. Prandtl*[2] für das Rohr und die ebene Platte abgeleitet und für wandnahe Punkte experimentell bestätigt gefunden hat. Das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz lautet

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u}{u_1} = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln \frac{y}{\delta} + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-1 + \ln (4\varkappa Re_\delta \sqrt{c_1}) + \varkappa Re_\delta \sqrt{c_1}\,\frac{\delta_0}{\delta}\right] \\ &\text{für} \\ &\frac{1}{2\varkappa Re_\delta \sqrt{c_1}} \ll \frac{y}{\delta} \ll 1 \\ &\left(c_1 = \frac{\tau_0}{\varrho u_1^2}, \qquad Re_\delta = \frac{u_1 \delta}{\nu}\right) \\ &\text{oder auch} \\ &\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + \frac{1}{\varkappa}\left[-1 + \ln 4\varkappa + \varkappa \frac{v_* \delta_0}{\nu}\right] \\ &\text{für} \\ &\frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa} \ll \frac{v_* y}{\nu} \ll Re_\delta \sqrt{c_1} . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII)}$$

In einer neueren Arbeit haben *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*[3] den experimentellen Nachweis des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes wandnaher Punkte auch für allgemeine Grenzschichten mit beliebigem Druckgradienten erbracht.

Wir wollen die betrachtete Zone der Grenzschicht die Reibungszone der Grenzschicht nennen. Sie ist durch annähernd konstante Schubspannung und in bezug auf den Mischungsweg durch $l \approx \varkappa (y - \delta_0)$ gekennzeichnet.

Analysiert man die Grenzschichtströmung vom Standpunkt der Größenordnung der laminaren und turbulenten Reibung, so gelangt man zu einer weiteren, für die Theorie der turbulenten Grenzschichten bedeutungsvollen, Feststellung. Wir können hier bekanntlich in der Grenzschicht drei Bereiche unterscheiden. Auf die laminare Unterschicht folgt ein Übergangsbereich mit gleicher Größenordnung der laminaren und turbulenten Reibung, der in den Bereich der (überwiegend) turbulenten Reibung mündet. Laminare Unterschicht und Übergangsbereich bilden beide nur sehr schmale Zonen der Grenzschicht, der Bereich der turbulenten Reibung erfüllt fast die ganze Grenzschicht. Für die theoretische Behandlung von Bedeutung ist nun die Feststellung, daß die in (VIII) genannte Einschränkung

$$\frac{y}{\delta} \gg \frac{1}{2\varkappa Re_\delta \sqrt{c_1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{v_* y}{\nu} \gg \frac{1}{2}\frac{1}{\varkappa}$$

für den Gültigkeitsbereich des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes sich als gleichbedeutend mit der Vernachlässigbarkeit der laminaren Reibung erweist! Integriert man (VI) unter der genannten Vereinfachung, so erhält man wieder das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz. Man kann den Sachverhalt auch formulieren, indem man feststellt, daß die oben definierte Reibungszone der Grenzschicht sich bis in den Bereich der turbulenten Reibung hinein erstreckt.

Über die im logarithmischen Geschwindigkeitsgesetz (VIII) auftretenden empirischen Koeffizienten haben wir schon in der Einleitung gesprochen. Sie hängen von der *Reynolds*schen Zahl $Re_\delta = u_1 \delta/\nu$ des Strömungsvorganges ab, wenn auch diese Abhängigkeit für sehr große

[1] Vgl. hier und im folgenden *W. Szablewski*, a. a. O.
[2] *L. Prandtl*, a. a. O., s. Fußnote, S. 38.
[3] *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, a. a. O.

*Re*-Zahlen eine sehr geringe wird. Dagegen hängen sie nicht, wie *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*[1] experimentell nachgewiesen haben, vom Druckgradienten der Grenzschichtströmung bzw. der Widerstandsziffer $\lambda = -\,dp/dx \cdot \delta/(\varrho/2)u_1^2$ ab.

**3. Bewegungsgleichungen.** Die konvergenten und divergenten Kanalströmungen stellen ein wesentlich allgemeineres Modell der Strömungsmechanik dar als Rohr und ebene Platte. Während beim Rohr im voll ausgebildeten Strömungszustand die Trägheitskräfte in Fortfall kommen, können wir bei der ebenen Platte konstanten Druck annehmen. Demgegenüber treten bei den Strömungen in verengten und erweiterten Kanälen sowohl Druck- wie Trägheitskräfte auf.

Wählen wir das Koordinatensystem wie in Abb. 1, so lauten die Bewegungsgleichungen der Grenzschicht bei Beschränkung auf kleine Öffnungswinkel

$$\varrho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial Y}\right)=-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\varrho\, l^2\left|\frac{\partial u}{\partial Y}\right|\frac{\partial u}{\partial Y}\right\}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial Y}=0\,. \tag{2}$$

Im Sinne der Grenzschichttheorie wären die Reibungskräfte durch die Ableitungen normal zur Kanalwandung, und nicht in $Y$-Richtung, zu bestimmen. Für kleine Öffnungswinkel ist dieser Unterschied vernachlässigbar. Der Druck wird als konstant über dem Kanalquerschnitt angenommen. Diese Annahme ist von *Nikuradse*[2] experimentell als zutreffend nachgewiesen worden. Theoretisch könnte sie an Hand der zweiten Bewegungsgleichung für die $Y$-Richtung nachgeprüft werden.

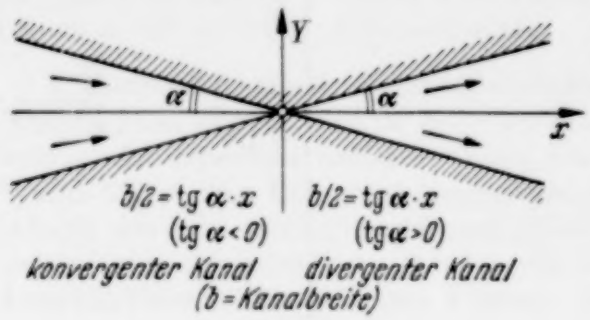


Abb. 1.

Wir transformieren auf das Strahlenbüschel

$$\eta = 1+\frac{Y}{b/2}\approx\frac{y}{b/2}\,, \tag{3}$$

wobei $\eta = 0$ dann mit der unteren Kanalwand zusammenfällt.

Mit dem Ähnlichkeitsansatz für den voll ausgebildeten Strömungszustand

$$u = u_1(x)\,\varphi(\eta)\,, \qquad v = v_1(x)\,\psi(\eta) \tag{4}$$

($u_1(x)$ Geschwindigkeit in Kanalmitte) erhalten wir aus (1)

$$\frac{b}{2}\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}\varphi^2+(1-\eta)\varphi\frac{d\varphi}{d\eta}\operatorname{tg}\alpha+\frac{v_1}{u_1}\psi\frac{d\varphi}{d\eta}=-\frac{dp}{dx}\frac{b/2}{\varrho u_1^2}+\frac{\nu}{u_1\, b/2}\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+\frac{d}{d\eta}\left[\left(\frac{l}{b/2}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2\right]. \tag{5}$$

Es folgt

$$u_1\sim\frac{1}{x}\,, \qquad v_1\sim u_1 \qquad (\sim \text{proportional}).$$

Mit dem Ansatz $u_1 = A/x$, $v_1 = B/x$ ergibt (5), wenn wir noch die *Reynolds*sche Zahl

$$Re = \frac{u_1\, b}{\nu}$$

und die Widerstandsziffer

$$\lambda = \frac{-\dfrac{dp}{dx}\,b}{(\varrho/2)\,u_1^2}$$

einführen,

$$-\operatorname{tg}\alpha\cdot\varphi^2+\operatorname{tg}\alpha\cdot(1-\eta)\varphi\frac{d\varphi}{d\eta}+\frac{B}{A}\psi\frac{d\varphi}{d\eta}=\frac{\lambda}{4}+\frac{2}{Re}\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+\frac{d}{d\eta}\left[\left(\frac{l}{b/2}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Aus der Kontinuität (2) folgt

$$\psi = -\frac{A}{B}\operatorname{tg}\alpha\cdot(1-\eta)\varphi\,. \tag{7}$$

Durch Elimination von $\psi$ aus (6) mittels (7) erhält man schließlich die Gleichung

$$\frac{\lambda}{4}+\frac{2}{Re}\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+\frac{d}{d\eta}\left[\left(\frac{l}{b/2}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2\right]=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\varphi^2\,. \tag{8}$$

[1] *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, a. a. O.
[2] *J. Nikuradse*, a. a. O., s. Fußnote 3 von Seite 38.

Integration über $\eta$ ergibt

$$\frac{\lambda}{4}\eta + \frac{2}{Re}\frac{d\varphi}{d\eta} + \left(\frac{l}{b/2}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 = c_1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \int_0^\eta \varphi^2\, d\eta\,, \tag{9}$$

wo

$$c_1 = \frac{2}{Re}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_0 = \frac{\tau_0}{\varrho u_1^2}\cos\alpha \approx \frac{\tau_0}{\varrho u_1^2}$$

(bei Beschränkung auf Winkel $\cos\alpha \approx 1$).

Die Randbedingungen lauten $\varphi = 1$ und $\frac{d\varphi}{d\eta} = 0$ für $\eta = 1$. Mittels dieser Randbedingungen ergibt sich aus (9) für $\eta = 1$ sofort der Impulssatz

$$c_1 = \frac{\lambda}{4} + \operatorname{tg}\alpha \cdot \int_0^1 \varphi^2\, d\eta\,. \tag{10}$$

Grenzt man als Kontrollfläche ein Kanalsegment der Länge Eins und der Höhe $b/2$ ab, so besagt der Impulssatz, daß die Impulsänderung, welche die Strömung beim Durchtritt durch das Segment in der Zeiteinheit erfährt, gleich den auf die Kontrollfläche ausgeübten Druck- und Reibungskräften ist.

Welcher Bereich der Kanalströmung besitzt nun den Charakter einer Grenzschicht? Ist nur ein Teilbereich als Grenzschicht anzusprechen, so haben wir jedenfalls in Kanalmitte Potentialströmung, so daß

$$\varrho\, u_1 \frac{du_1}{dx} = -\frac{dp}{dx}$$

bzw.

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\lambda}{4}\,. \tag{11}$$

Mit dieser Beziehung lautet der Impulssatz (10)

$$c_1 = \operatorname{tg}\alpha\left[\int_0^1 \varphi^2\, d\eta - 1\right]. \tag{12}$$

Da der physikalischen Bedeutung nach der Ausdruck in der Klammer negatives Vorzeichen hat, $c_1$ positives Vorzeichen, so folgt aus (12), daß $\operatorname{tg}\alpha < 0$ sein muß. D. h. nur bei konvergenten Kanälen haben wir in einem der Kanalmitte anliegenden Bereich Potentialströmung zu erwarten, während bei divergenten Kanälen der gesamte Strömungsbereich den Charakter einer Grenzschichtströmung hat. Die Beziehung (11) ist nun in der Tat für konvergente Kanäle nach den Messungen von *Nikuradse*[1] erfüllt:

| $\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\lambda/4$ |
|---|---|---|
| $-2°$ | $-0{,}035$ | $-0{,}034$ |
| $-4°$ | $-0{,}070$ | $-0{,}070$ |
| $-8°$ | $-0{,}140$ | $-0{,}139$ |

Im folgenden werden wir nur noch die konvergenten Strömungen behandeln. Mit der dimensionslosen Dicke $\eta_\delta$ der Grenzschicht erhalten wir aus (9) für $\eta = \eta_\delta$ mittels der Randbedingungen $\varphi \approx 1$ und $\frac{d\varphi}{d\eta} \approx 0$ für $\eta = \eta_\delta$, und wenn wir noch (11) berücksichtigen,

$$c_1 = \operatorname{tg}\alpha\left[\int_0^{\eta_\delta} \varphi^2\, d\eta - \eta_\delta\right]. \tag{13}$$

Führen wir den Winkel $\alpha^*$ durch

$$\delta = (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha^*)\, x$$

ein, so kommt nach (3)

$$\eta_\delta = 1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha^*}{\operatorname{tg}\alpha}\,. \tag{14}$$

Transformieren wir auf die Koordinate

$$\xi = \frac{\eta}{\eta_\delta} = \frac{\eta}{1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha^*}{\operatorname{tg}\alpha}}\,, \tag{15}$$

[1] *J. Nikuradse*, a. a. O., s. Fußnote 3 von Seite 38.

so schreibt sich (13)

$$c_1 = (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha^*)\left[\int_0^1 \varphi^2\, d\xi - 1\right]. \tag{16}$$

In unserem Formelsystem treten zwei unbekannte Parameter auf, die Schubspannungsziffer $c_f' (= 2\,c_1)$ und der die Grenzschichtdicke $\eta_\delta$ festlegende Winkel $\operatorname{tg}\alpha^*$. Zu ihrer Bestimmung werden wir im weiteren Verlauf der Rechnung die Randbedingung $\varphi = 1$ für $\eta = \eta_\delta$ und den Impulssatz in der Form (16) heranziehen. (Wir ziehen bei unserer Näherungsrechnung den Impulssatz statt der zweiten Randbedingung $d\varphi/d\eta = 0$ für $\eta = \eta_\delta$ heran, da es mehr verspricht, eine approximierende Funktion zu integrieren statt zu differentiieren.)

**4. Berechnung der konvergenten Kanalströmung.** a) Logarithmisches Geschwindigkeitsgesetz. Wir beschränken uns gleich auf das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz, das für den turbulenten Teil der Reibungszone gilt (siehe Abschn. 2). Dieses lautet nach Formel (VIII), wenn man beachtet, daß $Re = 2\,Re_{b/2}$ ist,

$$\varphi = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\ln\eta + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-1 + \ln(2\,\varkappa\,Re\,\sqrt{c_1}) + \varkappa\,\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right], \tag{17}$$

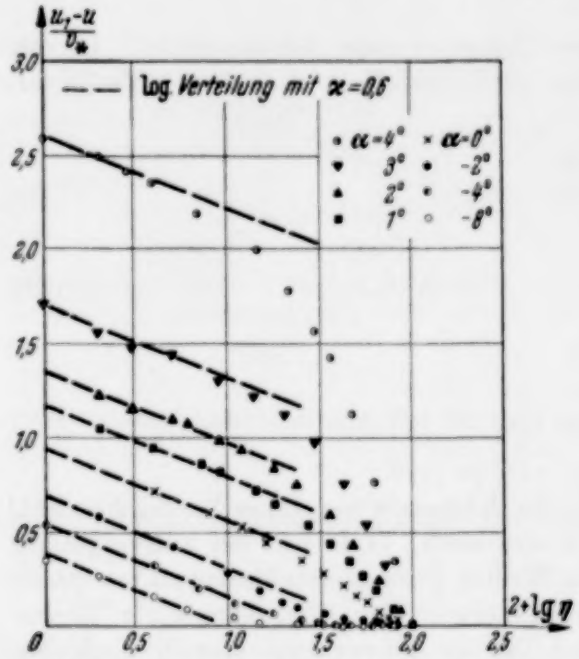


Abb. 2. Experimentelle Geschwindigkeitsverteilungen nach *Nikuradse*, VDI-Forschung 289 (1929).

oder mit

$$\frac{u}{v_*} = \frac{\varphi}{\sqrt{c_1}}, \qquad \frac{v_* y}{\nu} = \frac{Re\sqrt{c_1}}{2}\,\eta \tag{18}$$

auch

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v_* y}{\nu} + \frac{1}{\varkappa}\left[-1 + \ln 4\,\varkappa + \varkappa\,\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right]. \tag{19}$$

Hier treten die empirischen Koeffizienten $\varkappa$ und $v^*\,\delta_0/\nu$ auf. Den Koeffizienten $\varkappa$ ermitteln wir aus der Auftragung $(u_1 - u)/v^*$ der Meßpunkte über $\ln\eta$ (vgl. Abb. 2). Nach (17) wird

$$\frac{u_1 - u}{v_*} = -\frac{1}{\varkappa}\ln\eta + \text{Konst.} \tag{20}$$

Man ersieht aus Abb. 2, daß das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz für kleine $\eta$ erfüllt ist. Des weiteren ergibt sich, was für die Theorie von Bedeutung ist, daß die Neigung der Geraden unabhängig von $\alpha$ bzw. dem Druckgradienten ist. Es ergibt sich

$$\varkappa \approx 0{,}60\,. \tag{21}$$

Den Koeffizienten $v^*\,\delta_0/\nu$ ermitteln wir aus der Auftragung $u/v^*$ über $v^* y/\nu$ der Meßpunkte, Abb. 4. Den theoretischen Zusammenhang gibt (19) an. Man findet für die konvergenten Strömungen

| $\alpha$ | $\frac{v_*\delta_0}{\nu}$ | $Re$ |
|---|---|---|
| $-2°$ | 9,60 | 69 000 |
| $-4°$ | 9,60 | 67 000 |
| $-8°$ | 9,30 | 66 000 |

also $v^*\delta_0/\nu \approx 9{,}50$ für $Re \approx 67\,500$. (22)

Für die divergenten Strömungen ergeben sich, bei $Re$-Zahlen derselben Größenordnung, größere Abweichungen. Nach den neueren Messungen von *H. Ludwieg*[1] und *W. Tillmann* ist auch $v^*/\delta_0\,\nu$ als vom Druckgefälle unabhängig anzusehen.

Wir verwenden nunmehr die — exakt für den turbulenten Teil der Reibungszone gültigen — Verteilungsfunktionen (17) und (19) als Approximation für die Verteilung der Geschwindigkeit im ganzen Bereich der Grenzschicht.

[1] Vgl. *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, a. a. O.

Unterwerfen wir (vgl. den Hinweis Abschn. 3) die Verteilungsfunktion (17) der Randbedingung

$$\varphi = 1 \quad \text{für} \quad \eta = \eta_\delta \quad \text{bzw.} \quad \xi = 1 \,,$$

so erhalten wir die mit einem gewissen Fehler behaftete Relation

$$1 = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln \eta_\delta + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\left[-1 + \ln\left(2\varkappa\, Re \sqrt{c_1}\right) + \varkappa \frac{v_* \delta_0}{\nu}\right]. \tag{23}$$

Wir können dann für die Verteilung (17) auch schreiben

$$\varphi = 1 + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln \xi \,. \tag{24}$$

b) Grenzschichtdicke. Setzen wir (24) in den Impulssatz (16) ein, so erhalten wir

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha^* = -\frac{\varkappa}{2} \frac{\sqrt{c_1}}{1 - \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}} \tag{25}$$

bzw. nach (14)

$$\eta_\delta = \frac{\varkappa}{2} \frac{\sqrt{c_1}}{\left(1 - \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\right) \operatorname{tg}(-\alpha)} \,. \tag{26}$$

Nach (18) wird

$$\frac{v_* \delta}{\nu} = \frac{\varkappa}{4} \frac{Re\, c_1}{\left(1 - \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\right) \operatorname{tg}(-\alpha)} \,. \tag{27}$$

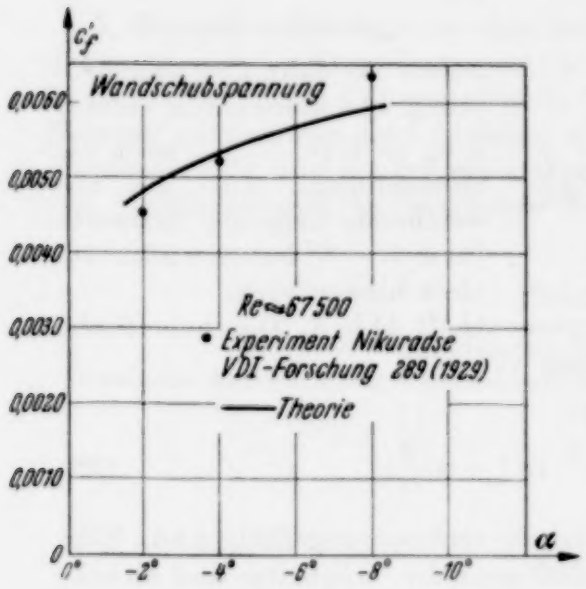


Abb. 3.

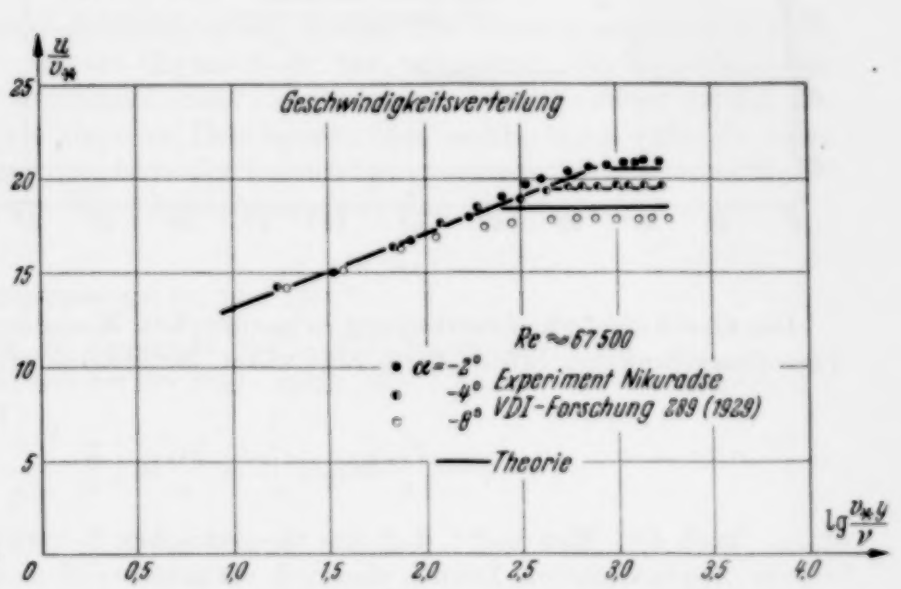


Abb. 4.

Mit den in c) angegebenen theoretischen Werten von $c_1 \left(= \frac{1}{2} c_f'\right)$ ergeben obige Formeln für die Grenzschichtdicke

| $\alpha$ | $\eta_\delta$ | $\lg \frac{v_* \delta}{\nu}$ |
|---|---|---|
| $-2°$ | 0,460 | 2,883 |
| $-4°$ | 0,243 | 2,626 |
| $-8°$ | 0,128 | 2,371 |

Inwieweit die Rechnung zutrifft, mag man nach Abb. 4 und 5 beurteilen.

c) Widerstandsgesetz. Aus (23) und (26) ergibt sich die Widerstandsformel

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}} = \frac{1}{\varkappa} \ln \left[\frac{\varkappa^2\, Re\, c_1}{\left(1 - \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}\right) \operatorname{tg}(-\alpha)}\right] + \frac{1}{\varkappa}\left[-1 + \varkappa \frac{v_* \delta_0}{\nu}\right] \tag{28}$$

mit $c_1 = \frac{1}{2} c'_f$. Man erhält

| $\alpha$ | $c'_{f\,theor}$ | $c'_{f\,exp}$ |
|---|---|---|
| $-2°$ | 0,00483 | 0,00456 |
| $-4°$ | 0,00534 | 0,00522 |
| $-8°$ | 0,00592 | 0,00634 |

(Vgl. Abb. 3). Die experimentellen Werte wurden dabei von *Nikuradse*[1] mittels des Impulssatzes aus der gemessenen Staudruckverteilung berechnet.

Die Übereinstimmung ist recht gut. Um so mehr, wenn man beachtet, daß der Meßwert $c'_f$ für $\alpha = -8°$ relativ sicher zu hoch liegt. Man ersieht das aus Abb. 4: die Meßpunkte der experimentellen Geschwindigkeitsverteilung für $\alpha = -8°$ liegen hier im Bereich des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes unterhalb der Meßreihen für $\alpha = -2°$ und $\alpha = -4°$. Neuere Messungen[2] haben jedoch ergeben, daß die Koeffizienten des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes unabhängig vom Druckgradienten sind.

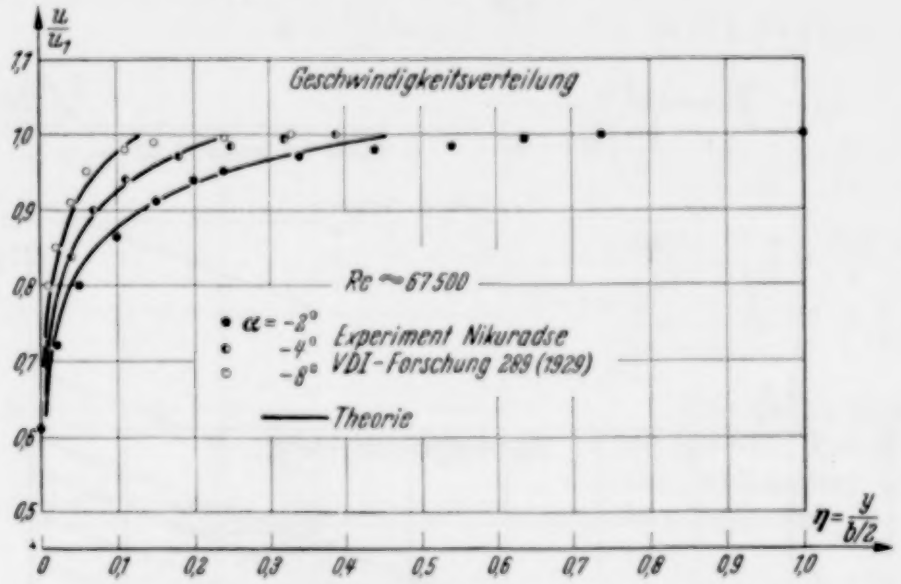


Abb. 5.

d) Geschwindigkeitsverteilung. In Abb. 4 haben wir das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz (19) mit den empirischen Koeffizienten (21) und (22) bis zur Grenze $v_* \delta/\nu$, die wir in (27) berechnet haben, dargestellt. Für das Restintervall bis zum Endpunkt

$$v_*(b/2)/\nu = Re\sqrt{c_1}/2$$

haben wir dann Potentialströmung und konstanten Verlauf $u/v_* = 1/\sqrt{c_1}$ ($c_{1\,theor}$ nach c)) anzunehmen. Auf die abweichende Lage der Meßwerte für $\alpha = -8°$ haben wir bereits oben hingewiesen.

Die Geschwindigkeitsverteilung in natürlichen Koordinaten enthält Abb. 5. Die theoretische Verteilungsfunktion lautet nach (24) unter Berücksichtigung von (26)

$$\varphi = \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} ln\, \eta + \left[1 + \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa} \ln\left(\frac{2}{\varkappa} \frac{1 - \frac{\sqrt{c_1}}{\varkappa}}{\sqrt{c_1}} \operatorname{tg}(-\alpha)\right)\right], \tag{29}$$

($c_{1theor}$ nach c)). Man sieht, daß die theoretischen Verteilungen verbesserungsfähig sind. Eine bessere Approximation könnte dadurch erreicht werden, daß man die Trägheits- und Druckkräfte in erster Näherung berücksichtigt[3]. Dabei wäre es dann auch erforderlich, die Mischungswegverteilung in zweiter Näherung entsprechend dem Ansatz

$$\frac{l}{\delta} = \varkappa \xi + \mu \xi^2$$

zu erfassen, was mit $\mu$ die Einführung eines dritten empirischen Koeffizienten mit sich bringen würde. Da jedoch bereits mittels des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes die wesentlichen Züge der hier behandelten Strömung in guter Näherung herauskommen, verzichten wir hier darauf.

e) Verdrängungsdicke. Formel

$$\frac{\delta_1}{b/2} = \int_0^1 (1 - \varphi)\, d\eta \approx \int_0^{\eta_\delta} (1 - \varphi)\, d\eta \tag{30}$$

[1] *J. Nikuradse*, a. a. O., s. Fußnote 3 von S. 38.
[2] *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, a. a. O.
[3] Vgl. *W. Szablewski*, a. a. O.

lautet bei Transformation auf $\xi$ nach (15)

$$\frac{\delta_1}{b/2} = \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha^*}{\operatorname{tg} \alpha}\right) \int_0^1 (1 - \eta)\, d\xi\,. \tag{31}$$

Mit (24) erhält man bei Beachtung von (25)

$$\frac{\delta_1}{b/2} = \frac{c_1}{2\left(1 - \frac{|c_1|}{\varkappa}\right) \operatorname{tg}(-\alpha)}\,. \tag{32}$$

Mit $c_{1theor}$ nach c) ergibt das

| $\alpha$ | $\left(\frac{\delta_1}{b/2}\right)_{theor}$ | $\left(\frac{\delta_1}{b/2}\right)_{exp}$ |
|---|---|---|
| $-2°$ | 0,038 | 0,037 |
| $-4°$ | 0,021 | 0,018 |
| $-8°$ | 0,012 | 0,010 |

(Vgl. Abb. 6). Auch diese charakteristische Strömungseigenschaft kommt theoretisch sehr gut heraus.

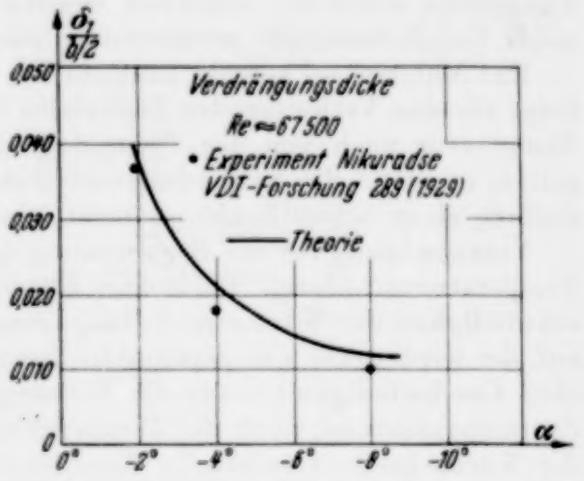

Abb. 6.

Abschließend bemerken wir, daß man nach dem hier entwickelten Formelsystem selbstverständlich auch konvergente Kanalströmungen bei großen *Re*-Zahlen berechnen kann. Bei der turbulenten Strömung längs der ebenen Platte haben wir für sehr große *Re*-Zahlen $\varkappa \approx 0{,}39$, $v_* \delta_0/\nu \approx 5{,}52$[1].

**5. Zusammenfassung.** Die Geschwindigkeitsverteilung in dem Teil der konvergenten Kanalströmung, der den Charakter einer turbulenten Grenzschicht hat, wird durch das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz approximiert. Die empirischen Koeffizienten dieses Gesetzes werden der Messung entnommen und erweisen sich als vom Druckgradienten unabhängig. Mittels einer Randbedingung und des Impulssatzes werden dann die Wandschubspannung sowie Grenzschicht- und Verdrängungsdicke berechnet. Gute Übereinstimmung mit den Messungen.

(Eingegangen am 14. Juni 1951.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Szablewski*, Berlin *W* 8, Jägerstraße 22/23.
Deutsche Akademie der Wissenschaften, Institut für Mathematik, Abt. „Angewandte Mathematik".

[1] Vgl. *W. Szablewski*, a. a. O.

# Wärmespannungen in einer Scheibe infolge einer wandernden Wärmequelle.

Von E. Melan.

Im Folgenden sollen die Wärmespannungen in einer dünnen Scheibe, die sich allseits ins Unendliche erstreckt, ermittelt werden, wie sie durch eine längs einer Geraden mit gleichförmiger Geschwindigkeit wandernden, punktförmigen Wärmequelle entstehen.

Das Material sei sowohl hinsichtlich der thermischen wie der elastischen Eigenschaften isotrop; alle das Verhalten des Materiales festlegenden Größen seien konstant, also weder von der Temperatur noch von der Spannung abhängig. Läßt man diese vereinfachenden Annahmen gelten, so bietet die Spannungsverteilung in einem hinreichend großen Blech, die bei der Herstellung einer Schweißnaht entsteht, ein praktisches Beispiel für diese Aufgabe.

Voraussetzung für die Bestimmung der Wärmespannung ist in allen Fällen die Kenntnis der Temperaturverteilung. Bei einem Körper von unendlicher Ausdehnung und gleichförmiger Geschwindigkeit der Wärmequelle längs einer Geraden tritt ein quasistationärer Temperaturzustand auf, der wieder eine quasistationäre Spannungsverteilung zur Folge hat. Für einen mit der gleichen Geschwindigkeit $v$ wie die Wärmequelle sich bewegenden Beobachter wird sich weder der Spannungszustand, noch die Temperaturverteilung ändern. Bezieht man sich daher auf ein mit der Wärmequelle wanderndes Koordinatensystem, wie dies im Folgenden geschieht, so kommt in den Gleichungen die Zeit $t$ nicht vor.

*D. Rosenthal* und *H. Cameron*[1] haben sich mit der Temperaturverteilung bei beweglichen Wärmequellen befaßt und bei einem quasistationären Zustand die Differentialgleichung für die Temperatur $T$

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{v}{a}\frac{\partial T}{\partial x}$$

abgeleitet. Darin bedeuten $x$, $y$ und $z$ die Koordinaten eines Punktes in einem mit der gleichen Geschwindigkeit $v$ wie die Wärmequelle wandernden Bezugssystem, $a = k/\varrho\sigma$, wobei $k$ die innere Wärmeleitfähigkeit, $\varrho$ die Dichte und $\sigma$ die spezifische Wärme vorstellt. Nimmt man die Temperatur längs der geringen Dicke der Scheibe konstant an, so verschwindet $\partial T/\partial z$, und $T$ genügt mit $v/2a = \lambda$ der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -2\lambda\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Das von *Rosenthal* angegebene partikulare Integral dieser Gleichung

$$T = Ne^{-\lambda x}\, i\, H_0^1(i\lambda r) \qquad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad i = \sqrt{-1}\right),$$

worin $H_0^1$ die *Hankel*sche Funktion erster Art und der Ordnung Null vorstellt, genügt bereits den Randbedingungen, daß nämlich $\partial T/\partial r$ für $x \to \infty$ und $\partial T/\partial y$ für $y \to \infty$ verschwindet. Die Integrationskonstante $N$ ist aus der Bedingung zu bestimmen, daß die Wärmequelle in $x = 0$ und $y = 0$ die Intensität $q$ besitzt, daß also für $r = 0$

$$-2k\pi r\frac{\partial T}{\partial r} = q$$

wird. Nun ist $\lim\limits_{r\to 0} i r \frac{\partial}{\partial r} H_0^1(i\lambda r) = -\frac{2}{\pi}$. und damit erhält man

$$T = q/4k\, e^{-\lambda x}\, i\, H_0^1(i\lambda r).$$

In einer früheren Arbeit[2] hat der Verfasser gezeigt, wie bei einer dünnen Scheibe mittels des thermischen Verschiebungspotentials $\Theta$ die Spannungen infolge einer Temperaturverteilung $T$ ermittelt werden können. $\Theta$ genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = \frac{m+1}{m-1}\alpha T,$$

---

[1] *D. Rosenthal*, Trans Amer. Soc. mech. Engr. 68 (1946), S. 849, sowie *Rosenthal* und *Cameron* ebenda 68 (1947), S. 961, ferner *Max Jakob*, Heat Transfer Bd. 1 New York.

[2] *E. Melan*, Österr. Ing.-Archiv Bd. IV (1950), S. 153 und ebenda Bd. VI (1952), S. 1.

und für die Spannungen ergeben sich die Ausdrücke

$$\sigma_{xx} = -2G\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = -2G\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}, \quad \sigma_{zz} = -2G\,\Delta\Theta, \quad \sigma_{xy} = 2G\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}.$$

Erfüllen diese Werte nicht die vorgeschriebenen Randbedingungen, so muß durch Überlagerung eines weiteren Spannungszustandes mit $T = 0$ für die Befriedigung der Randwerte Sorge getragen werden.

In dem vorliegenden Falle ist es möglich, die Auflösung der partiellen Differentialgleichung für $\Theta$ zu umgehen. Denn aus der Gleichung

$$\Delta\Theta = \frac{m+1}{m-1}\alpha T \qquad \text{und aus} \qquad \Delta T = -2\lambda\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\Delta T}{2\lambda}$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Theta = \frac{m+1}{m-1}\alpha\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{m+1}{m-1}\alpha\frac{\Delta T}{2\lambda},$$

also

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = -\frac{m+1}{m-1}\alpha\frac{T}{2\lambda} = -\frac{m+1}{m-1}\frac{q}{4k}\frac{\alpha}{2\lambda}e^{-\lambda x}\,i\,H_0^1(i\lambda r).$$

Hieraus erhält man wegen der Beziehung

$$\frac{d}{dz}H_0^1(z) = -H_1^1(z)$$

($H_1^1$ bedeutet die *Hankel*sche Funktion erster Art von der Ordnung 1)

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha}{2\lambda}\frac{q}{4k}e^{-\lambda x}\left[-\lambda i\,H_0^1(i\lambda r) + i\frac{\partial H_0^1(i\lambda r)}{\partial r}\frac{x}{r}\right]$$
$$= \frac{m+1}{m-1}\frac{dq}{8k}e^{-\lambda x}\left[i\,H_0^1(i\lambda r) - \frac{x}{r}H_1^1(i\lambda r)\right].$$

Für

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = \Delta\Theta - \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}$$

ergibt sich mit den vorstehenden Werten von

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \Delta\Theta = \frac{m+1}{m-1}\alpha T = \frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha q}{4k}e^{-\lambda x}\,i\,H_0^1(i\lambda r)$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = \frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha q}{4k}e^{-\lambda x}\,i\,H_0^1(i\lambda r) - \frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha q}{8k}e^{-\lambda x}\left[i\,H_0^1(i\lambda r) - \frac{x}{r}H_1^1(i\lambda r)\right]$$
$$= \frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha q}{8k}e^{-\lambda x}\left[i\,H_0^1(i\lambda r) + \frac{x}{r}H_1^1(i\lambda r)\right].$$

Endlich ergibt sich

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y} = -\frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha q}{8k}e^{-\lambda x}\cdot\frac{y}{r}H_1^1(i\lambda r).$$

Die Ausdrücke für die Spannungen lauten demnach

$$\sigma_{xx} = -2G\frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha q}{8k}e^{-\lambda x}\left[i\,H_0^1(i\lambda r) + \frac{x}{r}H_1^1(i\lambda r)\right],$$

$$\sigma_{yy} = -2G\frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha q}{8k}e^{-\lambda x}\left[i\,H_0^1\,i\lambda r - \frac{x}{r}H_1^1(i\lambda r)\right],$$

$$\sigma_{xy} = -2G\frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha q}{8k}e^{-\lambda x}\frac{y}{r}H_1^1(i\lambda r).$$

Damit ist die Randbedingung daß die Scheibe im Unendlichen spannungsfrei ist, bereits erfüllt; denn die *Hankel*schen Funktionen verschwinden dort wie $e^{-\lambda r}$. Die Spannungen $\sigma_{zz}$ hingegen können durch Überlagerung der Spannungen $-\sigma_{zz}$ zum Verschwinden gebracht werden. Bei einer dünnen Scheibe werden hierdurch die Spannungen $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$ und $\sigma_{xy}$ nicht geändert.

Um einen Überblick über die Spannungsverteilung zu erhalten, berechnen wir die Hauptspannungen aus

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$= -2G\frac{m+1}{m-1}\frac{\alpha q}{8k} e^{-\lambda x}\left[i\,H_0^1(i\lambda r) \pm H_1^1(i\lambda r)\right]$$

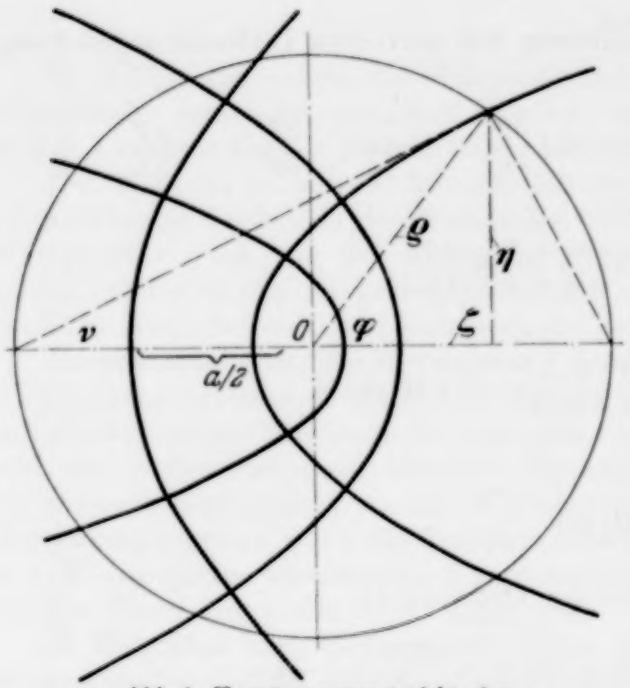


Abb. 1. Hauptspannungstrajektorien.

und die Richtung von $\sigma_1$ gegen die $x$-Richtung aus

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\sigma - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{r-x}{y} = \frac{r - r\cos\varphi}{r\sin\varphi} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Mit $\operatorname{tg}\nu = dy/dx = y'$ erhält man für die Hauptspannungslinien die Differentialgleichungen

$$y' = \frac{r-x}{y} \qquad \text{bzw.} \qquad y' = \frac{y}{r-x}$$

mit den Lösungen

$$x = \frac{1}{2}a\left(\frac{y^2}{a^2} - 1\right) \text{ und } x = -\frac{1}{2}a\left(\frac{y^2}{a^2} - 1\right),$$

also zwei Scharen confocaler Parabeln wie in Abb. 1 dargestellt.

In der untenstehenden Tafel sind die Werte der Hauptspannungen und die Richtung von $\sigma_1$ gegen die $x$-Achse angegeben. Dabei wurde

$$\lambda x = \xi,\ \lambda y = \eta,\ \lambda r = \varrho \text{ und } \frac{\alpha q(m+1)}{8k(m-1)} = 1$$

gesetzt.

| $\operatorname{tg}\varphi$ | $\operatorname{tg}\nu$ | $\varrho =$ | 0,1 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0000 | 0,000 | $\sigma_1 =$ | 4,275 | 0,2826 | 0,0424 | 0,0090 | 0,0022 |
| | | $\sigma_2 =$ | −7,071 | −0,9965 | −0,2396 | −0,0698 | −0,0219 |
| 0,3287 | 0,160 | $\sigma_1 =$ | 4,297 | 0,2898 | 0,0446 | 0,0112 | 0,0025 |
| | | $\sigma_2 =$ | −7,107 | −1,0220 | −0,2518 | −0,0862 | −0,0242 |
| 0,7500 | 0,330 | $\sigma_1 =$ | 4,362 | 0,3124 | 0,0518 | 0,0122 | 0,0033 |
| | | $\sigma_2 =$ | −7,214 | −1,1010 | −0,2926 | −0,0942 | −0,0326 |
| 1,3333 | 0,500 | $\sigma_1 =$ | 4,451 | 0,3452 | 0,0632 | 0,0165 | 0,0050 |
| | | $\sigma_2 =$ | −7,363 | −1,2171 | −0,3574 | −0,1271 | −0,0487 |
| 2,2913 | 0,655 | $\sigma_1 =$ | 4,540 | 0,3815 | 0,0772 | 0,0222 | 0,0074 |
| | | $\sigma_2 =$ | −7,509 | −1,3451 | −0,4365 | −0,1716 | −0,0726 |
| 4,8990 | 0,816 | $\sigma_1 =$ | 4,631 | 0,4216 | 0,0943 | 0,0300 | 0,0111 |
| | | $\sigma_2 =$ | 7,660 | −1,4866 | −0,5331 | −0,2316 | −0,1083 |
| | 1,000 | $\sigma_1 =$ | 4,725 | 0,4660 | 0,1152 | 0,0405 | 0,0165 |
| | | $\sigma_2 =$ | −7,815 | −1,6430 | −0,6521 | −0,3127 | −0,1616 |
| −4,8990 | −0,816 | $\sigma_1 =$ | 4,820 | 0,5150 | 0,1407 | 0,0547 | 0,0247 |
| | | $\sigma_2 =$ | −7,973 | −1,8158 | −0,7954 | −0,4221 | −0,2410 |
| −2,2913 | −0,655 | $\sigma_1 =$ | 4,918 | 0,5692 | 0,1719 | 0,0738 | 0,0368 |
| | | $\sigma_2 =$ | −8,134 | −2,0068 | −0,9715 | −0,5698 | −0,3595 |
| −1,3333 | −0,500 | $\sigma_1 =$ | 5,012 | −0,6291 | 0,2099 | 0,0996 | 0,0549 |
| | | $\sigma_2 =$ | −8,298 | −2,2179 | −1,1866 | −0,7691 | −0,5363 |
| −0,7500 | −0,330 | $\sigma_1 =$ | 5,119 | 0,6952 | 0,2564 | 0,1345 | 0,0819 |
| | | $\sigma_2 =$ | −8,466 | −2,4510 | −1,4492 | −1,0382 | −0,8002 |
| −0,3287 | −0,160 | $\sigma_1 =$ | 5,196 | 0,7493 | 0,2979 | 0,1483 | 0,1105 |
| | | $\sigma_2 =$ | −8,594 | −2,6419 | −1,6838 | −1,1452 | −1,0801 |
| 0,0000 | 0,000 | $\sigma_1 =$ | 5,222 | 0,7698 | 0,3131 | 0,1815 | 0,1221 |
| | | $\sigma_2 =$ | −8,637 | −2,7088 | −1,7702 | −1,4016 | −1,1937 |

(Eingegangen am 9. Juli 1951.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *E. Melan*, Wien IV, Technische Hochschule.

# Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik.

Von H. Ziegler.

**1. Einleitung.** In der Kinetik wird die Gleichgewichtslage eines Systems als stabil bezeichnet wenn sich dieses unter dem Einfluß hinreichend kleiner, im übrigen aber beliebiger Störungen nur wenig von ihr entfernt (und damit eine kleine Schwingung um sie ausführt). Auf dieser Definition beruht das Verfahren der kleinen Bewegungen, das nur die Linearisierbarkeit der Bewegungsdifferentialgleichungen voraussetzt und im Falle konstanter Beiwerte auf dem Wege über den Exponentialansatz, die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sowie die *Routh-Hurwitz*-Kriterien[1] die Stabilität eines Systems zu beurteilen gestattet.

In der Elastomechanik besteht das Stabilitätsproblem darin, die kritische Belastung zu bestimmen, unter der eine ursprünglich stabile Gleichgewichtslage instabil wird. Bei seiner Lösung kann man sich unmittelbar auf die Definition der Stabilität berufen und erhält damit das voraussetzungslos gültige

kinetische Stabilitätskriterium: Die kritische ist die kleinste Belastung, unter der eine geeignete Störung zu einer nicht in der nächsten Umgebung der Gleichgewichtslage verlaufenden Bewegung führt.

In der Praxis wird diesem kinetischen meist das bereits von *L. Euler* verwendete, in der Handhabung wesentlich einfachere, aber nicht ohne weiteres mit ihm gleichwertige

statische Stabilitätskriterium: Die kritische ist die kleinste Belastung, unter der neben der ursprünglichen (trivialen) erstmals eine weitere (nichttriviale) Gleichgewichtslage existiert

und in neuerer Zeit auch das

energetische Stabilitätskriterium: Die kritische ist die kleinste Belastung, unter der die gesamte potentielle Energie des Körpers nicht mehr positiv definit ist

vorgezogen.

Die Erfolge, die mit den zuletzt genannten Kriterien erzielt worden sind, haben die Frage nach ihrer Legitimität in den Hintergrund gedrängt und zu einer rein statischen Konzeption des seinem Wesen nach kinetischen Stabilitätsproblems geführt. Damit, d. h. mit der relativen Seltenheit nichtkonservativer Probleme, bei denen diese Konzeption zu Irrtümern führt, erklärt sich, daß — um nur ein großes Beispiel zu nennen — *S. Timoshenko* in seinem berühmten Standardwerk[2] ausschließlich — und ohne kinetische Begründung — die beiden letzten Kriterien verwendet.

*A. Pflüger* hat in seinem Buche über Stabilitätsprobleme der Elastostatik[3] — freilich ohne Beweis und ohne die Konsequenzen aus dieser Bemerkung zu ziehen[4] — darauf hingewiesen, daß bei nichtkonservativen Systemen nur das erste Kriterium in Frage kommt. Seither hat der Verfasser[5] nachgewiesen, daß beispielsweise das Knick- und das Drehzahlproblem der fliegenden, durch ein axiales Moment auf Torsion beanspruchten Welle nichtkonservativ ist und daß hier das bisher verwendete statische Stabilitätskriterium versagt.

Angesichts dieser Sachlage drängt sich die Frage auf, ob es nicht möglich sei, das statische oder das energetische Kriterium durch Umformulierung auch für nichtkonservative Systeme zu legitimieren. Zweck dieser Arbeit ist die Beantwortung dieser Frage, und zwar im negativen Sinne.

**2. Das kinetische Kriterium.** Ein typisches (eindimensionales, nichtgyroskopisches[6] und konservatives) Stabilitätsproblem ist die *Euler*sche Knickaufgabe für den (beliebig, nach Abb. 1

[1] *E. J. Routh*, Advanced Rigid Dynamics, 6. Aufl., S. 228; London 1930; *A. Hurwitz*, Math. Ann. **46** (1895), S. 273.

[2] S. *Timoshenko*, Theory of Elastic Stability, New York u. London 1936.

[3] *A. Pflüger*, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, S. 67. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

[4] Trotz seiner Bemerkung auf S. 67 behandelt er auf S. 217 ein nichtkonservatives (auch bei *L. Collatz*, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, S. 41, Leipzig 1949 zitiertes) Problem mit dem statischen Kriterium.

[5] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 2 (1951), S. 265.

[6] Vgl. *H. Ziegler*, Zum Begriff des konservativen Systems, Elem. der Math., erscheint demnächst.

etwa beidseitig gelenkig gelagerten) Stab mit der Masse $\mu(x)$ je Längeneinheit und der Biegesteifigkeit $\alpha(x)$. Seine Bewegungsenergie ist

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{y}^2 dx ,$$

und die potentielle Energie setzt sich gemäß

$$V = U - PW_0 , \qquad U = \frac{1}{2} \int_0^l \alpha y''^2 dx , \qquad W_0 = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx \tag{2.1}$$

aus der Formänderungsenergie und dem Potential der axialen Druckkraft zusammen. Ist $y_k(x)$ die zur Eigenkreisfrequenz $\sigma_k$ gehörige $k$-te normierte Eigenfunktion des unbelasteten, querschwingenden Stabes, so kann man die Schwingungen unter der Druckkraft $P$ in der Form

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \varphi_k(x)$$

darstellen und die $q_k$ als Lage-, für $P = 0$ als Normalkoordinaten deuten. In ihnen drücken sich die drei Bestandteile der Gesamtenergie in der Gestalt

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_k^2 , \qquad U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 q_k^2 , \qquad W_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{\infty} q_i q_k \int_0^l \varphi_i' \varphi_k' dx$$

aus; das kinetische Potential ist mithin

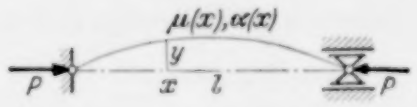


Abb. 1. Konservatives Problem: Axial gedrückter, beidseitig gelenkig gelagerter Stab.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{q}_k^2 - \sigma_k^2 q_k^2) + \frac{1}{2} P \sum_{i,k=1}^{\infty} q_i q_k \int_0^l \varphi_i' \varphi_k' dx ,$$

und die Lagrangeschen Beziehungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

führen auf die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\ddot{q}_k + \sigma_k^2 q_k - P \sum_{i=1}^{\infty} q_i \int_0^l \varphi_i' \varphi_k' dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

Im Falle des prismatischen, homogenen und beidseitig gelenkig gelagerten Stabes ist

$$\sigma_k^2 = \frac{k^4 \pi^4}{l^4} \frac{\alpha}{\mu} , \qquad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \sin \frac{k \pi x}{l} ,$$

und da hier neben den Eigenfunktionen $\varphi_k$ auch ihre Ableitungen $\varphi_k'$ im Intervall $0 \ldots l$ orthogonal sind, zerfällt das simultane System (2.3) in die unabhängigen Differentialgleichungen

$$\ddot{q}_k + \left( \frac{k^4 \pi^4}{l^4} \frac{\alpha}{\mu} - \frac{k^2 \pi^2}{\mu l^2} P \right) q_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) . \tag{2.4}$$

Die Eigenkreisfrequenzen unter der Belastung $P$ sind mithin durch

$$\sigma_k'^2 = \frac{k^2 \pi^2}{\mu l^2} \left( \frac{k^2 \pi^2 \alpha}{l^2} - P \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

gegeben, und die Forderung, daß sie sämtlich reell seien, führt auf die *Euler*sche Knicklast

$$P_k = \frac{\pi^2 \alpha}{l^2} . \tag{2.5}$$

Das kinetische Stabilitätskriterium gilt, da es unmittelbar auf der Definition der Stabilität beruht, voraussetzungslos. In der Tat ist leicht einzusehen, daß sich das hier verwendete Verfahren ohne weiteres auf mehrdimensionale Aufgaben und dadurch, daß man die rechten Seiten der *Lagrange*schen Gleichungen (2.2) durch verallgemeinerte Kräfte $Q_k$ ergänzt, auch auf gyroskopische und nichtkonservative Probleme übertragen läßt. Da aber das simultane System (2.3) nur ausnahmsweise zerfällt, ist die Methode im allgemeinen umständlich.

**3. Das energetische Kriterium.** Werden die Lagekoordinaten eines konservativen elastischen Systems von der trivialen Gleichgewichtslage (d. h. derjenigen des unbelasteten Systems) aus gemessen und die potentielle Energie in dieser Lage Null gesetzt, so gelten die Beziehungen

$$V(0, \ldots) = 0\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_k}(0, \ldots) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.1}$$

Nach dem Satz von der Erhaltung der Energie nimmt die Bewegungsenergie $T$ mit zunehmender Entfernung von der Gleichgewichtslage mit Sicherheit oder bestenfalls unter Umständen ab, je nachdem $V(q_1, q_2, \ldots)$ positiv definit ist oder nicht. Bei konservativen Systemen kann also das kinetische durch das energetische Kriterium ersetzt werden.

Oft läßt sich die potentielle Energie in der Umgebung der Gleichgewichtslage durch die abgebrochene Potenzreihe

$$V(q_1, q_2, \ldots) = V(0, \ldots) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial q_k}(0, \ldots)\, q_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k}(0, \ldots)\, q_i\, q_k \tag{3.2}$$

darstellen, und da hier zufolge (3.1) neben dem ersten Term auch der zweite, nämlich die erste Variation von $V$ verschwindet, kann das energetische Kriterium auch dahin formuliert werden, daß der dritte Term, der — vom Faktor 1/2 abgesehen — als zweite Variation von $V$ bezeichnet wird, positiv definit sein muß, wenn das System stabil sein soll.

Im Beispiel von Abschn. **2** ist die potentielle Energie $V = U - PW_0$ nur für genügend kleine Werte von $P$ positiv definit. Beim prismatischen, homogenen und beidseitig gelenkig gelagerten Stab folgt aus (2.4), daß die $q_k$ auch für den belasteten Stab Normalkoordinaten sind, und die Bedingung, daß

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k'^2\, q_k^2$$

positiv definit, die $\sigma_k'^2$ mithin sämtlich größer als Null seien, führt wieder auf die *Euler*sche Knicklast (2.5).

Der Gültigkeitsbereich des energetischen Kriteriums ist offensichtlich insofern enger als derjenige des kinetischen, als es die Existenz einer stationären, eindeutigen potentiellen Energie voraussetzt. Es bleibt indessen denkbar, daß es sich für nichtkonservative Systeme durch eine andere Überlegung statischer Natur, z. B. eine Arbeitsbetrachtung ersetzen läßt.

**4. Das statische Kriterium.** Läßt die potentielle Energie eines konservativen Systems die abgebrochene Entwicklung (3.2) zu, so kann sie, indem man die Darstellung (2.1) durch Einführung eines für die Belastung charakteristischen Parameters $\lambda$ verallgemeinert und (3.1) sowie (3.2) beizieht, in einer der Formen

$$V = U - \lambda W_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{\infty} c_{ik}(\lambda)\, q_i\, q_k \tag{4.1}$$

dargestellt werden; zudem ist sie mit der Energie $U$ der inneren Kräfte für genügend kleine Werte von $\lambda$ positiv definit. Wenn man jetzt statt $T$ und $V$ die quadratischen Formen $U$ und $W_0$ auf Hauptachsen transformiert, erhält man an Stelle der $q_k$ neue Normalkoordinaten $p_k$, in denen sich $U$ und $W_0$ durch

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2\,, \qquad W_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, p_k^2 \tag{4.2}$$

ausdrücken. Es ist daher

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda a_k) p_k^2\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_k} = (1 - \lambda a_k)\, p_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Solange $\lambda$ genügend klein ist, sind die Klammerausdrücke in diesen Beziehungen sämtlich positiv, und da die Relationen

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = (1 - \lambda a_k)\, p_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

die Gleichgewichtsbedingungen des Systems darstellen, existiert keine nichttriviale Gleichgewichtslage. Wird andererseits mit zunehmendem $\lambda$ erstmals eine der Klammern Null, so verliert $V$ seinen positiv definiten Charakter; gleichzeitig läßt aber (4.3) eine nichttriviale Lösung zu.

Beim prismatischen, homogenen und beidseitig gelenkig gelagerten Stab von Abschn. 2 fallen die Normalkoordinaten $p_k$ mit den $q_k$ zusammen. Die nichttrivialen Gleichgewichtslagen sind durch das Verschwinden der Klammern in (2.4) gekennzeichnet, und durch Nullsetzen der kleinsten erhält man wieder die *Euler*sche Knicklast (2.5).

Diesen Überlegungen zufolge gilt das statische Stabilitätskriterium für konservative Systeme, deren potentielle Energie sich gemäß (4.1) bzw. (4.2) darstellen läßt. Es bleibt aber denkbar, daß sich sein Gültigkeitsbereich — unter Umständen sogar auf nichtkonservative Systeme — erweitern läßt.

**5. Nichtkonservative Probleme.** Schwingungsfähige Systeme sind schon mit Rücksicht auf die stets vorhandene, vom Bewegungszustand abhängige Dämpfung nicht konservativ. Im allgemeinen kommt man bei Vernachlässigung der Dämpfung auf ein konservatives System zurück, das sich mit jedem der drei Kriterien behandeln läßt. Daneben kommt es indessen — und dieser Fall soll hier allein untersucht werden — vor, daß ein elastisches System bei der Belastung seinen konservativen Charakter deshalb verliert, weil sich die vom Bewegungszustand unabhängigen Lasten nicht von einem stationären, eindeutigen Potential ableiten lassen. Hierher gehört der von *A. Pflüger*[1] angeführte Stab, der eine stetige, in die Tangente der elastischen Linie fallende, bei der Deformation in dieser verbleibende Belastung trägt, ferner die vom Verfasser[2] behandelte, am freien Ende durch einen axialen Momentvektor belastete fliegende Welle. Der Grund für dieses anormale Verhalten liegt darin, daß weder die mit einem Körper starr verbundene (mithin an seiner Drehung teilnehmende) Kraft mit konstantem Betrag noch der konstante Momentvektor konservativ ist[3].

Abb. 2. Nichtkonservatives Problem: Tangential gedrückter, einseitig eingespannter Stab.

Als Musterbeispiel für diese Problemklasse, die zwar nicht sehr umfangreich, aber praktisch doch von Bedeutung ist, kann der einseitig eingespannte, homogene und prismatische, am freien Ende durch eine tangentiale Einzelkraft $P$ belastete Stab (Abb. 2) betrachtet werden. Die bei der Verschiebung in die (triviale) Gleichgewichtslage von $P$ geleistete Arbeit hängt von der Art ab, wie diese Verschiebung vorgenommen wird; die Last $P$ ist also nicht konservativ. Das energetische Kriterium versagt in der in Abschn. 1 gegebenen Form, und da man mühelos zeigen kann, daß keine nichttriviale Gleichgewichtslage existiert, müßte mit dem statischen Kriterium auf eine unbegrenzte Stabilität des Stabes geschlossen werden.

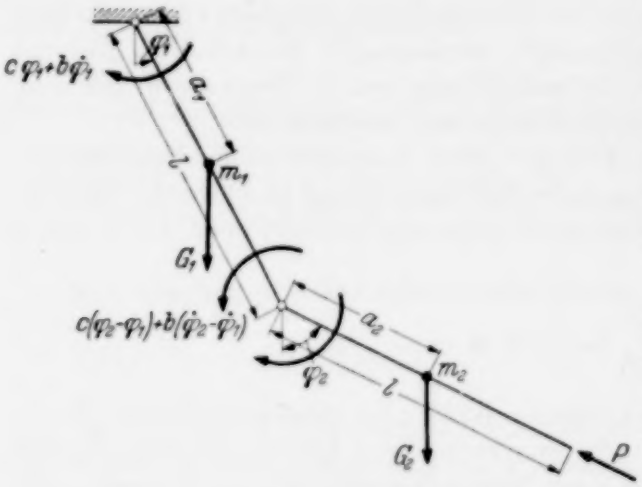


Abb. 3. Doppelpendel als zweigliedriges Modell des elastischen Stabes nach Abb. 2.

Die in Abschn. 3 und 4 offen gebliebene Frage, ob sich das statische oder das energetische Kriterium so modifizieren lasse, daß es auch auf nichtkonservative Systeme anwendbar wird, läßt sich schon an einfachen Beispielen beantworten, so etwa an einer Gelenkstabkette, die nach *K. Marguerre*[4] als vereinfachtes Modell des elastischen Stabes (Abb. 2) dienen kann.

**6. Ein Modell.** Abb. 3 zeigt ein Doppelpendel mit den (als klein vorausgesetzten) Drehwinkeln $\varphi_1$, $\varphi_2$, bestehend aus zwei starren Stäben der Länge $l$, deren Massen $m_1$, $m_2$ in den Abständen $a_1$, $a_2$ von den Gelenken konzentriert gedacht sind. In $m_1$, $m_2$ greifen zwei vertikale Kräfte $G_1$, $G_2$ an, die als Gewichte interpretiert werden können, am freien Ende des zweiten Stabes die axiale Kraft $P$ und in den Gelenken die Rückstellmomente $c\varphi_1$, $c(\varphi_2-\varphi_1)$ sowie die Dämpfungsmomente $b\dot{\varphi}_1$, $b(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_1)$.

Die gesamte Bewegungsenergie ist bis auf Größen zweiter Ordnung genau

$$T=\frac{1}{2}\left[(m_1 a_1^2+m_2 l^2)\,\dot{\varphi}_1^2+2\,m_2 l a_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2+m_2 a_2^2 \dot{\varphi}_2^2\right],$$

[1] *A. Pflüger*, a. a. O., S. 41.
[2] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 2 (1951), S. 279.
[3] Vgl. *H. Ziegler*, Zum Begriff des konservativen Systems, a. a. O.
[4] *K. Marguerre*, Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs, S. 211. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

die potentielle Energie der Kräfte $G_1$, $G_2$ sowie der Rückstellmomente

$$V = \frac{1}{2}\left[(G_1 a_1 + G_2 l + 2c)\varphi_1^2 - 2c\,\varphi_1\varphi_2 + (G_2 a_2 + c)\varphi_2^2\right],$$

und die verallgemeinerten nichtkonservativen Kräfte (die von $P$ und den Dämpfungsmomenten herrühren) berechnen sich zu

$$Q_1 = Pl(\varphi_1 - \varphi_2) - b(2\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2), \qquad Q_2 = b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2).$$

Die *Lagrange*schen Relationen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} = Q_k \qquad (L = T - V, \quad k = 1, 2)$$

führen auf die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned}(m_1 a_1^2 + m_2 l^2)\ddot{\varphi}_1 + m_2 l a_2 \ddot{\varphi}_2 + b(2\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + [G_1 a_1 + (G_2 - P)l + 2c]\varphi_1 + (Pl - c)\varphi_2 &= 0,\\ m_2 l a_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\varphi}_2 - b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - c\varphi_1 + (G_2 a_2 + c)\varphi_2 &= 0,\end{aligned}$$

und der Exponentialansatz

$$\varphi_k = A_k e^{\lambda t} \qquad (k = 1, 2) \tag{6.1}$$

auf die charakteristische Gleichung

$$p_0\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0, \tag{6.2}$$

deren Beiwerte durch

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= m_1 m_2 a_1^2 a_2^2,\\ p_1 &= [m_1 a_1^2 + m_2(l^2 + 2la_2 + 2a_2^2)]\,b,\\ p_2 &= (m_1 a_1^2 + m_2 l^2)(G_2 a_2 + c) + m_2 a_2^2[G_1 a_1 + (G_2 - P)l + 2c] - m_2 l a_2 (Pl - 2c) + b^2,\\ p_3 &= [G_1 a_1 + G_2(l + 2a_2) + 2c]\,b,\\ p_4 &= [G_1 a_1 + (G_2 - P)l + 2c](G_2 a_2 + c) + (Pl - c)c \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

gegeben sind.

Das Doppelpendel ist solange stabil, als sämtliche Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ der charakteristischen Gleichung nichtpositive Realteile aufweisen. Dann und nur dann bleibt nämlich die allgemeinste Bewegung, die sich aus vier Lösungen der Form (6.1) zusammensetzt, beschränkt.

Sind — wie dies im folgenden mehrfach zutreffen wird — je zwei Wurzeln entgegengesetzt gleich (etwa $\lambda_2 = -\lambda_1, \lambda_4 = -\lambda_3$), dann ist der Schwinger solange stabil, als die Werte $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$, $\lambda_3^2 = \lambda_4^2$ negativ oder Null sind.

Verschwindet eine der Wurzeln, so existiert nach (6.1) eine Lösung mit konstanten, nicht gleichzeitig verschwindenden Winkeln $\varphi_1$, $\varphi_2$, d. h. eine nichttriviale Gleichgewichtslage. Umgekehrt verlangt die Existenz einer nichttrivialen Gleichgewichtslage das Verschwinden einer dieser Wurzeln.

**7. Folgerungen.** a) Setzt man $b = 0$, $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $a_1 = a_2 = l$, $G_1 = G_2 = 0$, so läßt sich das Pendel der Abb. 3 als zweigliedriges Modell des (um $\pi$ gedrehten) Stabes von Abb. 2 auffassen, wobei die Masse auf die Knoten verteilt und das Eigengewicht samt der Dämpfung vernachlässigt ist. Die charakteristische Gleichung geht dann mit

$$p_0 = 2m^2 l^4, \qquad p_2 = ml^2(7c - 2Pl), \qquad p_4 = c^2 \tag{7.1}$$

in die biquadratische Gleichung

$$p_0\lambda^4 + p_2\lambda^2 + p_4 = 0 \tag{7.2}$$

mit der Diskriminante

$$\Delta = p_2^2 - 4p_0p_4 = m^2 l^4(41c^2 - 28Plc + 4P^2l^2) \tag{7.3}$$

über.

Für $P = 0$ sind die Wurzeln $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$, $\lambda_3^2 = \lambda_4^2$ der charakteristischen Gleichung, da neben der Diskriminante (7.3) alle Beiwerte (7.1) positiv sind, kleiner als Null (Abb. 4). Die allgemeinste Bewegung ist mithin beschränkt und setzt sich in bekannter Weise aus den beiden Normalschwingungen zusammen. Läßt man $P$ anwachsen, so nimmt $\Delta$ ab und wechselt für $P = (7/2 - \sqrt{2})\,c/l = P_k$ das Vorzeichen. Die Wurzeln $\lambda_1^2, \lambda_3^2$ nähern sich daher mit zunehmendem $P$,

allen für $P = P_k$ zusammen, und da sie für größere Werte von $P$ konjugiert komplex werden, ist

$$P_k = (7/2 - \sqrt{2})\,\frac{c}{l} = 2{,}086\,\frac{c}{l} \tag{7.4}$$

die kritische Belastung.

Da nach (7.1) $p_4 > 0$ ist, sind die Wurzeln von (7.2) für beliebige Werte von $P$ von Null verschieden; es gibt mithin — wie man übrigens auch durch Betrachtung des Kräftespiels in Abb. 3 bestätigt — keine nichttriviale Gleichgewichtslage. Damit folgt schon aus diesem einfachen Beispiel

Satz 1: Bei nichtkonservativen Systemen kann das statische Stabilitätskriterium versagen.

Man könnte aber noch vermuten, daß es nur bei Abwesenheit einer nichttrivialen Gleichgewichtslage versage.

b) Modifiziert man das Beispiel durch Berücksichtigung des Eigengewichtes, indem man statt $G_1 = G_2 = 0$ jetzt $G_1 = 2\,G$, $G_2 = G$ setzt, so erhält man statt (7.1)

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= 2\,m^2 l^4, \qquad & p_2 &= m\,l^2(7\,c - 2\,Pl + 6\,Gl), \\ p_4 &= c^2 + 5\,c\,Gl - PGl^2 + 3\,G^2 l^2 & & \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

und an Stelle von (7.3)

$$\Delta = m^2 l^4\,[41\,c^2 - 4\,c\,(7\,P - 11\,G)\,l + 4\,P^2 l^2 - 16\,PGl^2 + 12\,G^2 l^2]. \tag{7.6}$$

Für $P = 0$ sind die Wurzeln $\lambda_1^2 = \lambda_2^2, \lambda_3^2 = \lambda_4^2$ von (7.2) wieder negativ, das Pendel also erwartungsgemäß stabil. Läßt man $P$ anwachsen, so geht die Stabilität verloren, sobald (Abb. 4) entweder $\lambda_1^2 = 0$ oder $\lambda_1^2 = \lambda_3^2$ wird, denn dann verläßt mindestens $\lambda_1^2$ die negative reelle Achse. Die kritische Belastung bestimmt sich daher aus der schärferen unter den beiden Forderungen

$$p_4 = 0, \qquad \Delta = 0, \tag{7.7}$$

von denen die erste gleichzeitig die Bedingung für die Existenz einer nichttrivialen Gleichgewichtslage ist. Führt man (7.7) vermittelst (7.5) und (7.6) aus, so erhält man auf Grund der statischen Stabilitätsbedingung allein die kritische Belastung

Abb. 4. Verschiebung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit zunehmender Belastung.

$$P_k' = 5\,\frac{c}{l} + 3\,G + \frac{c^2}{l^2}\cdot\frac{1}{G},$$

der kinetischen zufolge aber zusätzlich

$$P_k = \frac{7}{2}\,\frac{c}{l} + 2\,G - \sqrt{2\,\frac{c^2}{l^2} + 3\,\frac{c}{l}\,G + G^2}.$$

Da $P_k' > 0$ ist, gibt es eine Belastung, für die eine nichttriviale Gleichgewichtslage existiert. Da indessen $P_k < P_k'$ ist und $P_k'$ für $G \to 0$ über alle Grenzen wächst, ist aber $P_k$ und nicht die vom statischen Kriterium gelieferte, unter Umständen sehr viel größere Belastung $P_k'$ die kritische. Es gilt mithin

Satz 2: Das statische Stabilitätskriterium kann auch bei Vorhandensein einer nichttrivialen Gleichgewichtslage versagen (und unter Umständen eine viel zu hohe kritische Belastung liefern).

Mit diesem Satze ist die Unbrauchbarkeit des statischen Kriteriums nach Abschn. 1 für nichtkonservative Systeme nachgewiesen; die Frage nach der Möglichkeit, $P_k$ auf anderem, rein statischem Wege — z. B. durch eine Betrachtung der Arbeiten — zu bestimmen, bleibt indessen noch offen.

c) Vernachlässigt man mit $b = 0$, $G_1 = G_2 = 0$ die Dämpfung und das Eigengewicht, so erhält man mit $m_1 = m_2 = m$, $a_1 = a_2 = l/2$ ein zweigliedriges Modell des (um $\pi$ gedrehten) Stabes von Abb. 2, das dem unter (a) besprochenen gleichwertig ist und sich nur darin von ihm unterscheidet, daß jetzt die Masse nicht in den Knoten, sondern in den Mittelpunkten der Stäbe konzentriert gedacht ist. Die charakteristische Gleichung ist auch hier (7.2), wobei aber (7.1) und

(7.3) durch

$$p_0 = \frac{1}{16} m^2 l^4, \qquad p_2 = \frac{1}{4} m l^2 (11\, c - 3\, Pl), \qquad p_4 = c^2,$$

$$\Delta = \frac{3}{16} m^2 l^4 (39\, c^2 - 22\, c\, Pl + 3\, P^2 l^2)$$

zu ersetzen sind.

Da wieder $p_4 > 0$ ist, erhält man die kritische Belastung durch Nullsetzen von $\Delta$, und zwar ergibt sich mit

$$P_k = 3 \frac{c}{l}$$

ein wesentlich höherer Wert, als er mit (7.4) im Falle (a) erhalten wurde. Es gilt also

Satz 3: Bei nichtkonservativen Systemen hängt die kritische Belastung bei sonst gleichen Verhältnissen (unter Umständen sehr stark) von der Masseverteilung ab.

Bei der Vereinfachung solcher Systeme ist mithin Vorsicht geboten.

Da die Masse in statische Untersuchungen nicht eingeht, folgt aus Satz 3

Satz 4: Nichtkonservative Stabilitätsprobleme lassen sich auf statischem Wege nicht lösen.

Damit ist gezeigt, daß sich auch das energetische Kriterium nach Abschn. 1 für nichtkonservative Systeme nicht legitimisieren läßt. Mit der Feststellung, daß nur das kinetische Kriterium anwendbar bleibt, rückt aber die Frage nach dem Einfluß der Dämpfung in den Vordergrund.

d) Mit $G_1 = G_2 = 0$, $m_1 = 2\,m$, $m_2 = m$, $a_1 = a_2 = l$ erhält man ein zweigliedriges Modell des Stabes von Abb. 2, bei dem auch die innere Dämpfung berücksichtigt ist. Die charakteristische Gleichung hat die Form (6.2), wobei die Koeffizienten durch

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= 2\, m^2 l^4, & p_1 &= 7\, m l^2 b, \\ p_2 &= m l^2 (7\, c - 2\, Pl) + b^2, & p_3 &= 2\, c\, b, \\ p_4 &= c^2 \end{aligned}\right\} \qquad (7.8)$$

gegeben sind. Da die Gleichung (6.2) im Gegensatz zu (7.2) nicht mehr quadratisch ist, empfiehlt sich die Verwendung der *Routh-Hurwitz*-Kriterien[1], und diesen zufolge ist das System jedenfalls stabil, solange die Ausdrücke

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2 - \frac{p_0 p_3}{p_1}, \quad p_3 - \frac{p_1^2 p_4}{p_1 p_2 - p_0 p_3}, \quad p_4$$

das gleiche Vorzeichen besitzen. Setzt man hier die Werte (7.8) ein, so kommt man auf die Stabilitätsbedingungen

1. $b > 0$,
2. $P < \frac{45}{14} \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{m l^3}$,
3. $P < \frac{41}{28} \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \frac{b}{m l^3}$,
4. $c^2 > 0$,

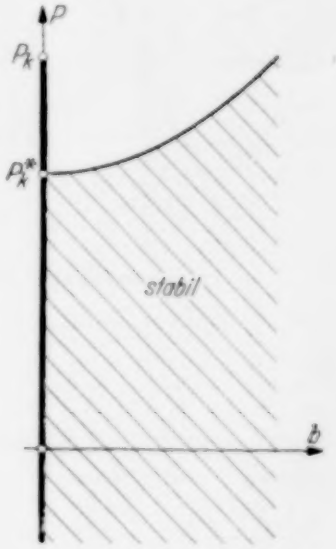

Abb. 5. Stabilitätsbereich des Modells bei Berücksichtigung der Dämpfung ($b$ Dämpfung, $P$ Belastung).

von denen die vierte auf alle Fälle erfüllt ist. Aus der ersten schließt man, daß das System für negative Dämpfungen (Abb. 5) instabil ist; aus der dritten, die schärfer als die zweite ist, ergibt sich für positive Dämpfung die kritische Belastung

$$P_k = \frac{41}{28} \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \frac{b}{m l^3},$$

und diese geht für $b \to 0$ nicht gegen (7.4), sondern gegen

$$P_k^* = 1{,}464 \frac{c}{l}. \qquad (7.9)$$

[1] A. a. O. zitiert.

Mathematisch läßt sich die Diskrepanz zwischen $P_k$ und $P_k^*$ damit verstehen, daß die *Routh-Hurwitz*-Kriterien die Bedingungen für Abklingen der allgemeinsten Lösung darstellen, die stationären Schwingungen unter der Belastung $P_k^* < P < P_k$ im Sinne dieser Kriterien also bereits als instabil gelten können. Dem entspricht die mechanische Feststellung, daß stets mit einer — wenn auch noch so geringen — Dämpfung zu rechnen ist, und da diese im Intervall $P_k^* < P < P_k$ abilisierend wirkt, muß vom physikalischen Standpunkte aus auch für das praktisch ungedämpfte System $P_k^*$ als kritische Belastung angesehen werden. Man hat also

Satz 5: Bei nichtkonservativen Systemen kann die Dämpfung labilisierend wirken,

sowie schließlich

Satz 6: Bei nichtkonservativen Systemen kann die geringste Dämpfung die kritische Belastung erheblich modifizieren.

Systeme der hier betrachteten Art lassen sich also nur mit dem kinetischen Stabilitätskriterium behandeln. Dieses ist in der Anwendung wesentlich umständlicher als die beiden anderen und wird mit der als notwendig erkannten Berücksichtigung der Dämpfung noch schwerfälliger. Die sich hieraus ergebenden Komplikationen dürften sich indessen kaum umgehen lassen. Sie liegen wohl in der Natur des Problems, und zwar in der Tatsache begründet, daß die Energieaufnahme des nichtkonservativen Systems durch geringe Variationen im Bewegungsablauf empfindlich beeinflußt werden kann.

(Eingegangen am 28. Juli 1951.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *H. Ziegler*, Rüschlikon bei Zürich, Weierweg 6.

# Bewegung des langgestreckten Rotationskörpers in einer zur Längsachse geneigten Richtung.

Von W. Müller.

**1. Die grundlegenden Ansätze für die Querbewegung.** In einer früheren Mitteilung[1] ist die Darstellung der Längsbewegung eines Rotationskörpers mittels einer stetigen Quellsenkenverteilung $f(t)$ längs der auf der Achse gelegenen Grundstrecke $(-1 < t < +1)$ gegeben worden. Die Querbewegung in Richtung senkrecht zur Achse läßt sich bekanntlich aus einer Verteilung von Dipolen gewinnen, die nach der Bewegungsrichtung, etwa der $y$-Achse orientiert sind. Mit der Verteilungsfunktion $F(t)$, die längs derselben Grundstrecke definiert sein soll, erhält man das Potential

$$\Phi = -\frac{B_0}{4\pi}\cos\varphi \int_{-1}^{+1} \frac{F(t)\sin\vartheta\, dt}{r^2}, \tag{1}$$

wo $r^2 = (x-t)^2 + \eta^2$ zu setzen ist, $\varphi$ den Polarwinkel gegen die $y$-Achse in der Parallelkreisebene und $\vartheta = \arcsin(\eta/r)$ den Winkel zwischen der Längsachse und der Verbindungslinie des laufenden Dipolpunktes mit dem Aufpunkt $P$ bezeichnet (Abb. 1).

Die Lösung führt durch Umformung auf tesserale oder zugeordnete Kugelfunktionen $P_\nu^1(\mu)$ und $Q_\nu^1(\zeta)$ mit dem Index 1, wobei die Argumente $\mu, \zeta$ mit den früher definierten Ellipsoidkoordinaten identisch sind. Man erhält dann die Darstellung

$$\Phi = \frac{B}{2\pi}\cos\varphi \sum \beta_\nu\, P_\nu^1(\mu)\, Q_\nu^1(\zeta) \tag{2}$$

oder mit Hilfe der bekannten Beziehungen $\overline{P}_\nu(\mu) = \sqrt{1-\mu^2}\, P_\nu^1(\mu)$; $\overline{Q}_\nu(\zeta) = -\sqrt{\zeta^2-1}\, Q_\nu^1(\zeta)$

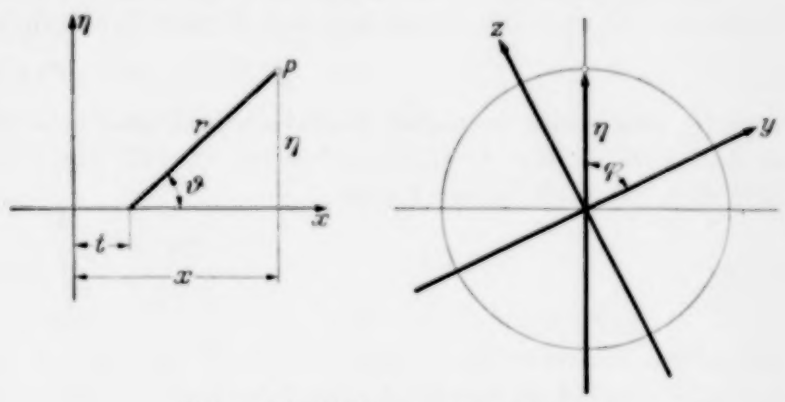


Abb. 1 Grundachsen und Koordinaten.

$$\Phi = -\frac{B}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{\eta}\sum \beta_\nu\, \overline{P}_\nu(\mu)\, \overline{Q}_\nu(\zeta). \tag{3}$$

Man wird auch hier zu der Bedeutung und zur Bestimmung der Koeffizienten $\beta_\nu$ gelangen, wenn man den Grenzübergang zu Punkten durchführt, die in unmittelbarer Nähe der mit Dipolen besetzten Grundstrecke liegen. Es ergibt sich dabei

$$\lim_{\zeta\to 1} \overline{Q}_\nu(\zeta) = 1, \qquad \mu \sim x \text{ für } \zeta = 1, \qquad \lim_{\zeta\to 1} \Phi = -\frac{B}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{\eta}\sum \beta_\nu\, \overline{P}_\nu(t).$$

Der letzte Ausdruck stimmt aber formal überein mit dem ebenen Potential

$$\Phi = -\frac{B\,F(t)\cos\varphi}{2\pi\eta} = -\frac{m\cos\varphi}{2\pi\eta}$$

einer senkrecht zur $(y,z)$-Ebene gelegenen und nach der $y$-Richtung orientierten unendlich langen Dipolstrecke mit dem Moment $m$. Wir haben daher

$$F(t) = \sum \beta_\nu\, \overline{P}_\nu(t), \tag{4}$$

oder die Größen $\beta_\nu$ stimmen überein mit den Koeffizienten der nach den überstrichenen Kugelfunktionen $\overline{P}_\nu$ entwickelten (reduzierten) Verteilungsfunktion. Zu ihrer Bestimmung be-

[1] Ing.-Archiv 19 (1951) S. 282.

nutzen wir die Orthogonalitätsbeziehungen für $P_n^1$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^1(t)\, P_\nu^1(t)\, dt = 0 \qquad (n \neq \nu), \qquad \int_{-1}^{+1} [P_n^1(t)]^2\, dt = \frac{2n(n+1)}{2n+1}. \tag{5}$$

Dann ergibt sich aus (3) durch Multiplikation mit $P'_\nu = \frac{P_\nu^1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\overline{P}_\nu}{1-t^2}$ und Integration

$$\int_{-1}^{+1} F(t)\, P'_\nu(t)\, dt = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n^1(t)}{\sqrt{1-t^2}} \sum \beta_\nu \sqrt{1-t^2}\, P_\nu^1(t)\, dt = \int_{-1}^{+1} P_n^1(t) \sum \beta_\nu\, P_\nu^1(t)\, dt = \beta_n \frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

oder mit geändertem Index

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)} \int_{-1}^{+1} F(t)\, P'_\nu(t)\, dt. \tag{6}$$

Man kann daher das Potential (2) auch in der geschlossenen Integralform schreiben

$$\Phi = \frac{B}{2\pi} \cos\varphi \sum \frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)} P_\nu^1(\mu)\, Q_\nu^1(\zeta) \int_{-1}^{+1} F(t)\, P'_\nu(t)\, dt. \tag{7}$$

Aus gewissen formalen Gründen werden wir im Folgenden häufig statt der Koeffizienten $\beta_\nu$ die größeren Koeffizienten $\beta'_\nu = \nu(\nu+1)\,\beta_\nu$ verwenden.

Im allgemeinen beschränken wir uns ferner auf solche Funktionen $F(t)$, die in den Endpunkten $t = \pm 1$ der Grundstrecke Nullstellen haben. Dann können wir setzen

$$P(t) = (1-t^2)\, g(t),$$

wo $g(t)$ eine ganze rationale Funktion bedeuten soll, die keine Nullstellen zwischen $\pm 1$ besitzt, so daß $F(t)$ in dem Definitionsbereich überall positive Werte annimmt. Mit Einführung von $g$ läßt sich (6) auch in der Form

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)} \int_{-1}^{+1} g(t)\, \overline{P}_\nu(t)\, dt \tag{8}$$

schreiben. Entsprechend läßt sich auch die Formel (7) auf die Funktion $g(t)$ reduzieren. Man hat nur statt $F(t)$ die Funktion $g(t)$ und an Stelle von $P'_\nu$ die überstrichene Funktion $\overline{P}_\nu$ zu schreiben.

Wenn wir $g(t)$ etwa in der Form $(t+1)^m$ ansetzen, so erhalten wir bei Benutzung der Funktionen

$$\overline{P}_1 = 1-t^2, \quad \overline{P}_2 = 3t(1-t^2), \quad \overline{P}_3 = \frac{3}{2}(5t^2-1)(1-t^2), \quad \overline{P}_n = \frac{2n-1}{n-1} t\, \overline{P}_{n-1} - \frac{n}{n-1} \overline{P}_{n-2} \tag{9}$$

folgende Tabelle 1 für die Koeffizienten $\beta$ in den Fällen $m = 0$ bis $m = 5$.

Tabelle 1. *Die Koeffizienten $\beta$.*

| $m$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ | $\beta_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | — | — | — | — | — |
| 1 | 1 | $\frac{1}{3}$ | — | — | — | — |
| 2 | $\frac{6}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{15}$ | — | — | — |
| 3 | $\frac{8}{5}$ | $\frac{8}{7}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{35}$ | — | — |
| 4 | $\frac{16}{7}$ | $\frac{40}{21}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{8}{35}$ | $\frac{8}{315}$ | — |
| 5 | $\frac{24}{7}$ | $\frac{200}{63}$ | $\frac{16}{9}$ | $\frac{48}{77}$ | $\frac{8}{63}$ | $\frac{8}{693}$ |

Damit ergeben sich z. B. für die zusammengesetzte Form

$$g(t) = \gamma_1(t+1) + \gamma_2(t+1)^2 + \gamma_3(t+1)^3 + \gamma_4(t+1)^4$$

folgende Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \gamma_1 + \frac{6}{5}\gamma_2 + \frac{8}{5}\gamma_3 + \frac{16}{7}\gamma_4, \\ \beta_2 &= \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{2}{3}\gamma_2 + \frac{8}{7}\gamma_3 + \frac{40}{21}\gamma_4, \\ \beta_3 &= \frac{2}{15}\gamma_2 + \frac{2}{5}\gamma_3 + \frac{8}{9}\gamma_4, \\ \beta_4 &= \frac{2}{35}\gamma_3 + \frac{8}{35}\gamma_4. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Wir werden im folgenden auf diese Darstellung noch zurückkommen.

**2. Berechnung der Geschwindigkeiten.** Nach den in der vorigen Mitteilung angegebenen Formeln erhält man bei Einführung der Koeffizienten $\beta'_\nu$ für die Komponenten der Absolutgeschwindigkeit der Flüssigkeit folgende Ausdrücke:

$$v_x = -\frac{B\cos\varphi}{2\pi\eta(\zeta^2-\mu^2)}\sum \beta'_\nu G_\nu(\zeta\mu), \qquad v_\eta = \frac{B\cos\varphi}{2\pi\eta(\zeta^2-\mu^2)}\sum \beta'_\nu H_\nu(\zeta\mu). \tag{11}$$

Dabei wird, wie die Rechnung ergibt,

$$\left.\begin{aligned} G_\nu = \eta^2\, Y_\nu = \eta^2\,[\zeta P_\nu(\mu) Q'_\nu(\zeta) - \mu P'_\nu(\mu) Q_\nu(\zeta)] &= \frac{1}{\nu}\,[\zeta \overline{P}_{\nu-1}\overline{Q}_\nu - \mu\,\overline{P}_\nu\,\overline{Q}_{\nu-1}] \\ &= -\frac{1}{\nu+1}\,[\zeta\overline{P}_{\nu+1}\overline{Q}_\nu - \mu\,\overline{P}_\nu\,\overline{Q}_{\nu+1}]. \end{aligned}\right| \tag{12a}$$

$$\left.\begin{aligned} H_\nu &= \frac{\eta^2}{\nu(\nu+1)}\left[\zeta\, P^1_\nu(\mu)\frac{dQ^1_\nu(\zeta)}{d\zeta} - \mu\frac{dP^1_\nu(\mu)}{d\mu}Q^1_\nu(\zeta)\right] \\ &= \frac{1}{\eta}\left\{\frac{1}{\nu}\,[\zeta(1-\mu^2)\,\overline{P}_\nu\,\overline{Q}_{\nu-1} + \mu(\zeta^2-1)\,\overline{P}_{\nu-1}\overline{Q}_\nu] - \frac{1}{\nu+1}(\zeta^2-\mu^2)\,\overline{P}_\nu\,\overline{Q}_\nu\right\} \\ &= \frac{1}{\eta}\left\{\frac{1}{\nu}(\zeta^2-\mu^2)\,\overline{P}_\nu\,\overline{Q}_\nu - \frac{1}{\nu+1}\,[\zeta(1-\mu^2)\,\overline{P}_\nu\overline{Q}_{\nu+1} + \mu\,(\zeta^2-1)\,\overline{P}_{\nu+1}\overline{Q}_\nu]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{12b}$$

Mit den Abkürzungen

$$T_n = \frac{P'_n(\mu)\,Q'_n(\zeta)}{n(n+1)} = -\frac{\overline{P}_n\overline{Q}_n}{n(n+1)\eta^2} = -\frac{\overline{T}_n}{\eta^2}, \qquad S_n = \frac{P''_n(\mu)\,Q''_n(\zeta)}{(n-1)\,n(n+1)(n+2)}$$

erhält man ferner die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned} G_n &= G_{n-2} - (2n-1)\,\eta^2\,(\zeta^2-\mu^2)\,T_{n-1}, \\ H_n &= H_{n-2} - \eta\,(\zeta^2-\mu^2)\,[(2n-1)\,x\,T_{n-1} - n\,T_n - (n-1)\,T_{n-2}] \\ &= H_{n-2} - \eta\,(\zeta^2-\mu^2)\,[(2n-1)\,\eta^2\,S_{n-1} + T_{n-2} - T_n]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Im Besonderen wird

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= -\mu(1-\mu^2), \qquad G_2 = (1-\mu^2)\left[-\zeta + \frac{3}{2}(\zeta^2-\mu^2)\,\overline{Q}_1\right], \\ H_1 &= \frac{1-\mu^2}{\eta}\left[\zeta(1-\mu^2) - \frac{1}{2}(\zeta^2-\mu^2)\,\overline{Q}_1\right], \qquad H_2 = \frac{\mu(1-\mu^2)}{\eta}\left[1-\mu^2-\frac{1}{2}(\zeta^2-\mu^2)\,\overline{Q}_2\right]. \end{aligned}\right| \tag{14}$$

**3. Beispiel des Ellipsoids.** Wie bekannt, läßt sich die Längsbewegung des langgestreckten Ellipsoids, dem ein konstanter Wert von $\zeta = \zeta_0$ zugeordnet ist, aus der Quellverteilung $f(t) = t$ ableiten. Es läßt sich nun zeigen, daß die Querbewegung durch eine Dipolverteilung

$$F(t) = 1 - t^2, \qquad g = 1$$

erzeugt werden kann (Abb. 2). Wir erhalten hier nur einen Koeffizienten

$$\beta_1 = \frac{3}{4}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)\,dt = 1$$

unserer Entwicklung und daher das Potential

$$\Phi_2 = -\frac{B}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{\eta}\,\overline{P}_1(\mu)\,\overline{Q}_1(\zeta)$$

$$= -\frac{B\cos\varphi}{2\pi}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta^2-1}}\,\overline{Q}_1(\zeta). \tag{15}$$

Die Absolutgeschwindigkeiten werden

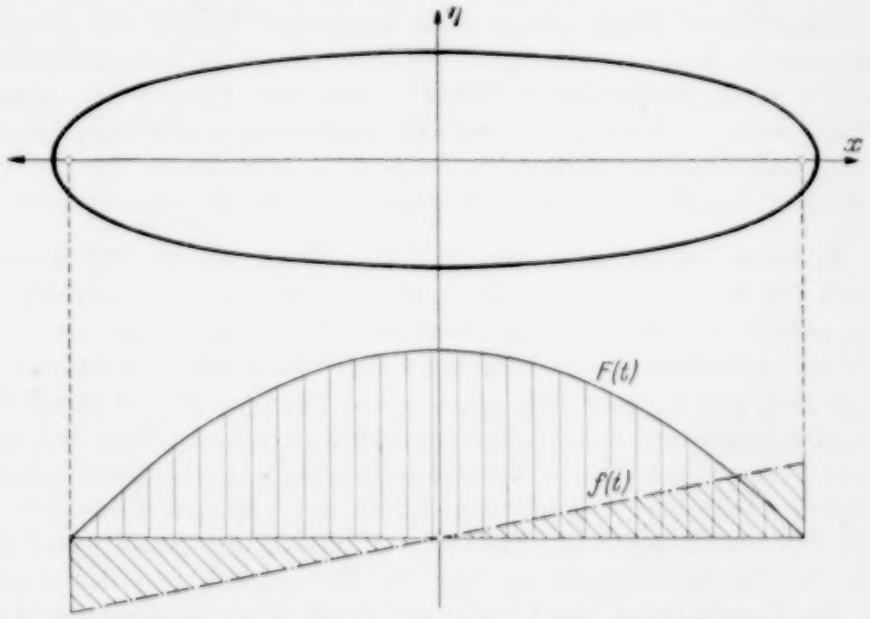


Abb. 2. Die Verteilungsfunktionen $f(t)$ und $F(t)$ für die $R_1$ (Ellipsoid).

$$v_x = \frac{B}{2\pi}\frac{\mu}{\zeta^2-\mu^2}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta^2-1}}, \qquad v_y = \frac{B[2\,\zeta(1-\mu^2) - (\zeta^2-\mu^2)\,\overline{Q}_1]}{2\pi(\zeta^2-\mu^2)(\zeta^2-1)}. \tag{16}$$

Wenn man zum Ausdruck bringt, daß im Schnitt mit der Oberfläche ($\zeta = \zeta_0$) mit der Meridianebene $\varphi = 0$ das Verhältnis der Relativgeschwindigkeiten $(v_y - v_2)/v_x$ der aus der Betrachtung der Längsbewegung hervorgehenden Tangentenneigung

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{\mu}{\zeta_0}\sqrt{\frac{\zeta_0^2 - 1}{1 - \mu^2}} \tag{17}$$

gleich sein muß, so erhält man durch eine einfache Rechnung

$$\frac{B}{2\pi v_2} = \frac{\zeta_0^2 - 1}{\frac{2}{\zeta_0} - \overline{Q}_1(\zeta_0)}. \tag{18}$$

Da die Längsbewegung des Ellipsoids bekannt ist, so erhält man durch Überlagerung mit der Querbewegung auch die schiefe Bewegung, d. h. die Bewegung in einer Richtung $\psi$ gegen die Längsachse, für welche die Beziehung $\operatorname{tg} \psi = v_2/v_1$ gilt.

**4. Der allgemeine Fall der zusammengesetzten Bewegung und das Hauptproblem.** Wir haben in der ersten Mitteilung gezeigt, wie man aus einer stetigen Quellsenkenverteilung längs der Grundstrecke bei Zutreffen der Schließungsbedingung die Kontur des zugehörigen Rotationskörpers und alle Daten der Längsbewegung dadurch ermitteln kann, daß man die Koeffizienten $\alpha_\nu$ aus der Entwicklung der Verteilungsfunktion $f(t)$ nach einfachen Kugelfunktionen $P_\nu$ ableitet. Insbesondere sind mit Hilfe dieser Koeffizienten unmittelbar die Potentialfunktion $\Phi$, die Stromfunktion $\Psi$ und die Gleichung der Meridiankontur zu gewinnen. Die Querbewegung, die sich aus einer axialen Verteilung von Dipolen ableiten läßt, bringt nun aber eine nicht mehr rotationssymmetrische Strömung hervor. Da insbesondere keine Stromfunktion existiert wie im Falle der Längsbewegung, so ist es zunächst nicht möglich, bei gegebener Verteilungsfunktion $F(t)$ die Kontur in expliziter Form darzustellen. Man muß also nach einer indirekten Methode suchen, um die Meridiankontur oder die Quellsenkenverteilung aufzufinden. Der einzige Fall, bei dem diese Beziehung zwischen Längs- und Querbewegung in geschlossener Form angegeben werden kann, ist der Fall des Ellipsoids, wo die normierten Funktionen die einfache Gestalt $f(t) = t$, $F(t) = 1 - t^2$ haben. In diesem Falle ist aber die Funktion $f(t)$ der negativen Ableitung der Funktion $F(t)$ nach $t$ proportional:

$$f(t) = -c\,F'(t). \tag{19}$$

Unter dem Hauptproblem der Hydrodynamik des Rotationskörpers werde ich die Fragen zusammenfassen nach der Auffindung der erzeugenden Dipolverteilung eines durch die Quellfunktion $f(t)$ bestimmten Rotationskörpers oder nach der Ermittlung des Zusammenhangs beider Verteilungsfunktionen $f(t)$ und $F(t)$, wenn die Meridiankontur des Körpers entweder graphisch oder rechnerisch, also etwa durch die Koordinaten der Randpunkte gegeben ist. Nach Beantwortung dieser Fragen kann auch der ganze Verlauf der räumlichen Strömung, bzw. die entsprechende Druckverteilung an der Oberfläche als bekannt gelten, die entsteht, wenn der Drehkörper unter irgendeinem Winkel gegen die Längsachse translatorisch in der reibungslosen Flüssigkeit sich bewegt. Obwohl die mathematisch strenge Lösung des Hauptproblems bis jetzt nicht aufgefunden worden ist, so sind doch mehrere, für die Praxis ausreichende Näherungslösungen angebbar, die der vollständigen Lösung beliebig nahe kommen.

**5. Erste Näherungslösung.** Für den Fall, daß der Meridianschnitt des Körpers nicht allzu stark von der Ellipse abweicht, kann man in erster Annäherung annehmen, daß die Funktion $f(t)$ der negativen Ableitung der Funktion $F(t)$ proportional ist. Im allgemeinen ist damit in der Tat die charakteristische Beziehung zwischen beiden Funktionen richtig wiedergegeben, wie z. B. auch das von *Karman* durchgerechnete Beispiel eines Luftschiffkörpers zeigt. Die Nullstellen von $f(t)$ fallen dann angenähert mit den Maximalstellen von $F(t)$ zusammen, und diese Werte entsprechen ungefähr den Abszissen für die Extremwerte des Parallelkreishalbmessers des Drehkörpers. Bei einer kegelartigen Spitze am hinteren Ende hat z. B. $f(t)$ eine einfache Wurzel und $F(t)$ eine Doppelwurzel in $t = -1$. Die Funktionen $f$ und $F$ verhalten sich also angenähert wie die Querkraftverteilung und die Momentenlinie eines stetig belasteten linearen Balkens.

Die Berechtigung, die Gleichung (19) als erste Annäherung der Problemlösung zu betrachten, ergibt sich aus folgender Überlegung. Zunächst kann man zeigen, daß die Quellsenkenbelegung $f(t)$ gleichwertig ist mit einer gewissen Verteilung von axial gestellten Dipolen entsprechend der Funktion $F$, deren negative Ableitung mit $f(t)$ übereinstimmt. Setzt man $f(t) = -F'(t)$, so

ergibt sich aus dem Potential der Quellbelegung durch partielle Integration

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{F'(t)\,dt}{r} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{F(t)}{r}\right]_1^2 - \frac{1}{4\pi}\int \frac{F(t)\cos\vartheta\,dt}{r^2}, \tag{20}$$

wo $r^2 = (x-t)^2 + \eta^2$ und $\cos\vartheta = (x-t)/r$ zu setzen ist. Wenn, wie vorausgesetzt wird, $F(t)$ in den Endpunkten 1 und 2 der Grundstrecke verschwindet, so wird

$$\Phi_1 = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{F(t)\cos\vartheta\,dt}{r^2}. \tag{21}$$

Das ist aber der Form nach das Potential einer Verteilung von in die $x$-Richtung gestellten Dipolen mit dem auf die Längeneinheit bezogenen Moment $F(t)$. Der einzelne Dipol vom Moment $m$ gibt nun, mit dem Parallelstrom vereinigt, als Grenze eine Kugel vom Halbmesser $R = \sqrt[3]{\frac{m}{2\pi v_1}}$. Bei Drehung der Dipolachse in die $y$-Richtung erhält man bei seitlicher Parallelstromgeschwindigkeit $v_2$ in Richtung der negativen $y$-Achse wieder eine Kugel vom Halbmesser $\sqrt[3]{\frac{m}{2\pi v_2}}$. Man braucht also nur das Moment entsprechend abzuändern, um die gleiche Kugel zu gewinnen wie im ersten Fall. Bei einer Verdrehung aller Dipolelemente um 90° mit entsprechender Änderung der Momente wird im allgemeinen die Grenze nur in erster Annäherung erhalten, da in Wirklichkeit infolge gegenseitiger Beeinflussung eine Änderung der Geschwindigkeitsvektoren und damit eine Verschiebung der Grenze eintritt. Daß aber diese Verschiebung nur gering ist, ergibt sich aus der Eigenschaft des Ellipsoids, bei dem bereits die als erste Näherung bezeichnete Annahme von $F(t)$ mit der genauen Lösung zusammenfällt.

Wir wollen zunächst, d. h. vor der Verfolgung weiterer Näherungslösungen, noch einige Folgerungen aus der Beziehung $f = -c\,F'(t)$ ableiten. Wenn man die Reihen für $f$ und $F$ einführt, so ergibt sich aus

$$f = \sum \alpha_\nu P_\nu(t) = -c\,F'(t) = -c\sum \beta_\nu \frac{d\overline{P}_\nu}{dt} = -c\sum \beta'_\nu P_\nu,$$

daß die $\alpha_\nu$ und $\beta_\nu$ in einfachster Weise wie folgt voneinander abhängen:

$$c\,\nu(\nu+1)\,\beta_\nu = c\,\beta'_\nu = \alpha_\nu. \tag{22}$$

Dann wird aber

$$\Psi = \frac{A\,c}{2\pi}\sum \beta_\nu \overline{P}_\nu(\mu)\,\overline{Q}_\nu(\zeta), \tag{23}$$

ferner das Potential der Querströmung für $\varphi = 0$

$$\Phi_2 = -\frac{B}{2\pi\eta}\sum \beta_\nu \overline{P}_\nu \overline{Q}_\nu. \tag{24}$$

Aus der Gleichung für die Kontur $R$

$$\frac{A\,c}{\pi\,v_1}\sum \beta_\nu \overline{P}_\nu(\mu)\,\overline{Q}_\nu(\zeta) - \eta^2 = 0$$

folgt aber

$$\sum \beta_\nu \overline{P}_\nu \overline{Q}_\nu = \frac{\pi\,v_1}{c\,A}\eta^2; \tag{25}$$

daher ist in der Meridianebene $\varphi = 0$

$$\Phi_2 = -\frac{v_1\,B}{2\,c\,A}\eta. \tag{26}$$

Die Potentialwerte $\Phi_2$ für die Punkte der Meridiankurve sind also den Ordinaten von $R$ proportional. Dieser Satz ist besonders für eine erste Abschätzung des Trägheitskoeffizienten $k_2$ von Wichtigkeit, der sich unmittelbar aus dem Quotienten

$$k_2 = -\frac{\int \Phi_2\,\eta\,dx}{v_2\int \eta^2\,dx} \tag{27}$$

berechnen läßt[1]. In erster Annäherung würde sich dann ergeben

$$k_2 = \frac{B\,v_1}{2\,c\,A\,v_2}. \tag{28}$$

[1] *W. Müller*, Ing.-Archiv, 18 (1950), S. 341.

Das Verhältnis der Größen $A$ und $B$ hängt von den Abmessungen des Rotationskörpers ab. Beim Ellipsoid, wo diese Verhältnisse genau zutreffen, hat man $c = 1/2$ ferner

$$\frac{A}{2\pi v_1}\alpha_1 = \frac{\zeta_0^2 - 1}{\overline{Q}_1(\zeta_0)}, \qquad \frac{B}{2\pi v_2}\beta_1 = \frac{\zeta_0^2 - 1}{\frac{2}{\zeta_0} - \overline{Q}_1(\zeta_0)}, \tag{29}$$

daher

$$k_2 = \frac{\overline{Q}_1(\zeta_0)}{\frac{2}{\zeta_0} - \overline{Q}_1(\zeta_0)}. \tag{30}$$

Zur Aufstellung weiterer Näherungen im allgemeinen Fall kann man eine erweiterte Verteilungsfunktion mit willkürlichen Konstanten zugrunde legen, die dann nach einem noch zu besprechenden Verfahren zu ermitteln sind.

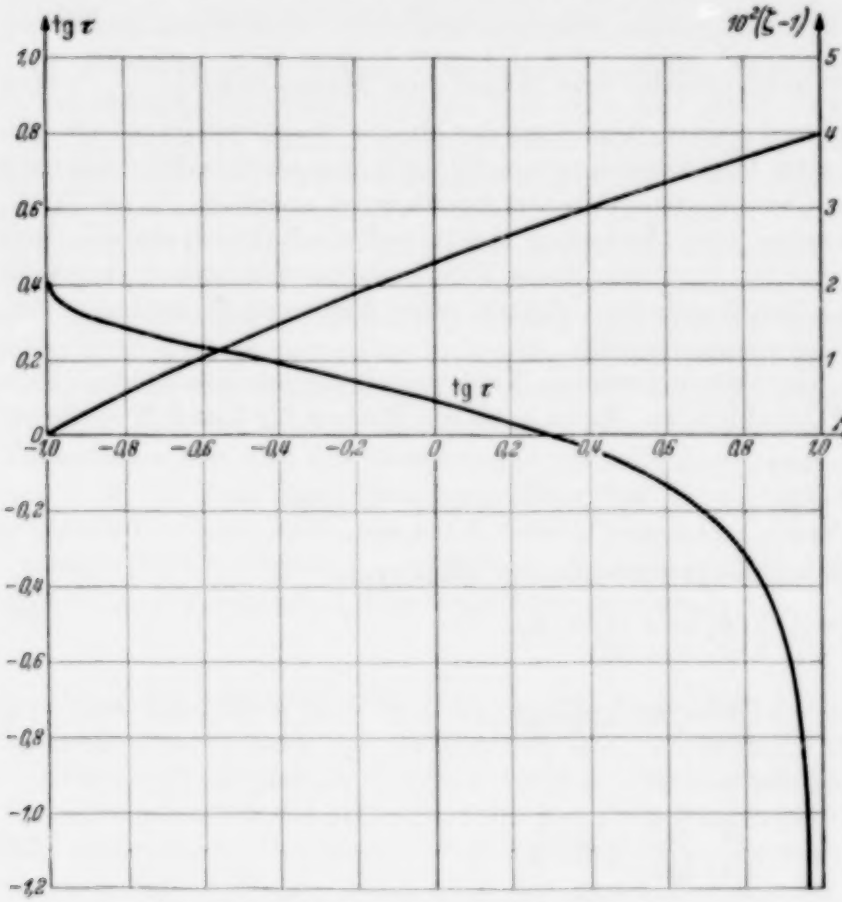


Abb. 3. tg τ und ζ μ-Kurve für die Punkte der $R_2$.

Wenn wir etwa den aus der quadratischen Quellsenkenverteilung

$$f(t) = (t + 1)(t - 1/3)$$

gewonnenen $R_2$ ausgehen, so wird die erste Annäherung der zugehörigen Dipolverteilung durch die Funktion

$$\left.\begin{aligned} F_I &= -3\gamma_0 \int f(t)\, dt \\ &= \gamma_0 (1 - t^2)(t + 1) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

dargestellt. In zweiter Annäherung kann man dann eine Funktion höheren Grades einführen, die in $t = 1$ einfach und in $t = -1$ doppelt verschwindet, im übrigen aber Konstante enthält, die den besonderen Bedingungen des Problems anzupassen sind. Wir setzen etwa

$$\left.\begin{aligned} F_{II} = (1 - t^2)\,[&\gamma_1 (t + 1) \\ &+ \gamma_2 (t + 1)^2 + \gamma_3 (t + 1)^3 \\ &+ \gamma_4 (t + 1)^4]. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

**6. Anpassung der Relativströmung an die gegebene Kontur.** Die vervollständigte Lösung kann nun dadurch erreicht werden, daß die Koeffizienten $\beta_\nu$ unserer Entwicklung der besonderen Formgebung des vorliegenden Rotationskörpers $R_2$ angepaßt werden. Die Ebene $\varphi = 0$ ist die Symmetrieebene für die Seitenströmung, die von der Bewegung des Körpers in der y-Richtung herrührt, und zugleich die einzige Ebene, welche vollständige Stromlinien, sowohl der Längs- wie auch der Querströmung enthält. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Identität der Grenzen in beiden Teilströmungen läßt sich dahin aussprechen, daß die Verhältnisse der relativen Geschwindigkeitskomponenten in beiden Fällen in allen Punkten der Meridiankontur übereinstimmen. Führen wir die Geschwindigkeitswerte nach (11) ein und bezeichnen wir den als bekannt vorauszusetzenden Neigungswinkel der Tangente mit $\tau$, so läßt sich die „Tangentialbedingung" in der Form schreiben

$$\sum \beta'_\nu H_\nu(\zeta\mu) + \operatorname{tg}\tau \sum \beta'_\nu G_\nu(\zeta\mu) = \frac{2\pi}{B} v_2\, y(\zeta^2 - \mu^2). \tag{33}$$

Wenn man diese Bedingungsgleichung für $m$ Profilpunkte in Ansatz bringt, so lassen sich die Koeffizienten $b'_\nu = B\beta'_\nu / 2\pi v_2$ für $\nu = 1$ bis $m$ aus einem System von $m$ linearen Gleichungen eindeutig bestimmen, und damit ist nicht nur die stetige Verteilung der Dipole, sondern auch das Potential der Querströmung und wenn man von einem durch eine Quellverteilung erzeugten Drehkörper ausgegangen ist, auch das zusammengesetzte Stromfeld mitsamt den Druckverhältnissen als angenähert bekannt anzusehen.

Tabelle 2. *Die zu $R_2$ gehörenden Funktionen $G_n$ und $H_n$.*

| $\zeta$ | $\mu$ | $x$ | $\eta$ | tg $\tau$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,004 | —0,863 | —0,8662 | 0,0453 | 0,3083 | 0,2203 | 0,1355 | 0,0851 | 0,0108 | 0,7399 | —0,6337 | 0,4860 | —0,3715 |
| 1,008 | —0,703 | —0,7086 | 0,0901 | 0,2610 | 0,3550 | —0,1283 | —0,0687 | 0,1642 | 1,448 | —1,047 | 0,5741 | —0,2146 |
| 1,010 | —0,617 | —0,6233 | 0,1114 | 0,2400 | 0,3821 | —0,0573 | —0,1670 | 0,2041 | 1,776 | —1,138 | 0,4420 | 0,0746 |
| 1,015 | —0,389 | —0,3948 | 0,1600 | 0,1854 | 0,3302 | 0,1913 | —0,2975 | 0,0667 | 2,325 | —0,9613 | —0,1278 | 0,4656 |
| 1,020 | —0,142 | —0,1450 | 0,1985 | 0,1246 | 0,1393 | 0,3900 | —0,1575 | —0,2049 | 2,5865 | —0,3873 | —0,5650 | —0,2790 |
| 1,023 | 0,0143 | 0,0147 | 0,2156 | 0,0871 | —0,0145 | 0,4180 | 0,0164 | 0,2397 | 2,5101 | 0,0378 | —0,6375 | —0,0276 |
| 1,028 | 0,288 | 0,2961 | 0,2281 | 0,0015 | —0,2643 | 0,2713 | 0,2470 | —0,0420 | 2,0145 | 0,6137 | —0,2308 | —0,3443 |
| 1,030 | 0,402 | 0,4144 | 0,2255 | —0,0406 | —0,3380 | 0,1560 | 0,2590 | 0,07148 | 1,7030 | 0,7247 | —0,0544 | —0,3048 |
| 1,036 | 0,760 | 0,7874 | 0,1758 | —0,2635 | —0,3210 | —0,1587 | —0,0185 | 0,0616 | 0,5210 | 0,4250 | 0,2800 | 0,1310 |
| 1,039 | 0,945 | 0,9840 | 0,0897 | —0,7714 | —0,0975 | —0,0825 | —0,0635 | 0,0461 | 0,0265 | 0,0363 | 0,0493 | 0,0397 |

Wir legen den Rotationskörper $R_2$ mit der oben angegebenen Quellkurve und dem Streckungsverhältnis $\pi v_1 : A = 6{,}67$ zugrunde, für den in der Abb. 3 sowohl die Abhängigkeit der Ellipsoid-Koordinaten $\zeta\,\mu$ (die einer Geraden sehr nahe kommt), wie auch die Kurve tg $\tau$ als Funktion von $\mu$ dargestellt ist. Ferner haben wir in den Abb. 4 und 5 den Verlauf der Funktionen $G_\nu$ und $H_\nu$ für $\nu = 1$ bis $\nu = 4$ in Abhängigkeit von $\zeta$ veranschaulicht und schließlich in Tabelle 2 für einige Profilpunkte die Werte dieser Funktionen zusammengestellt.

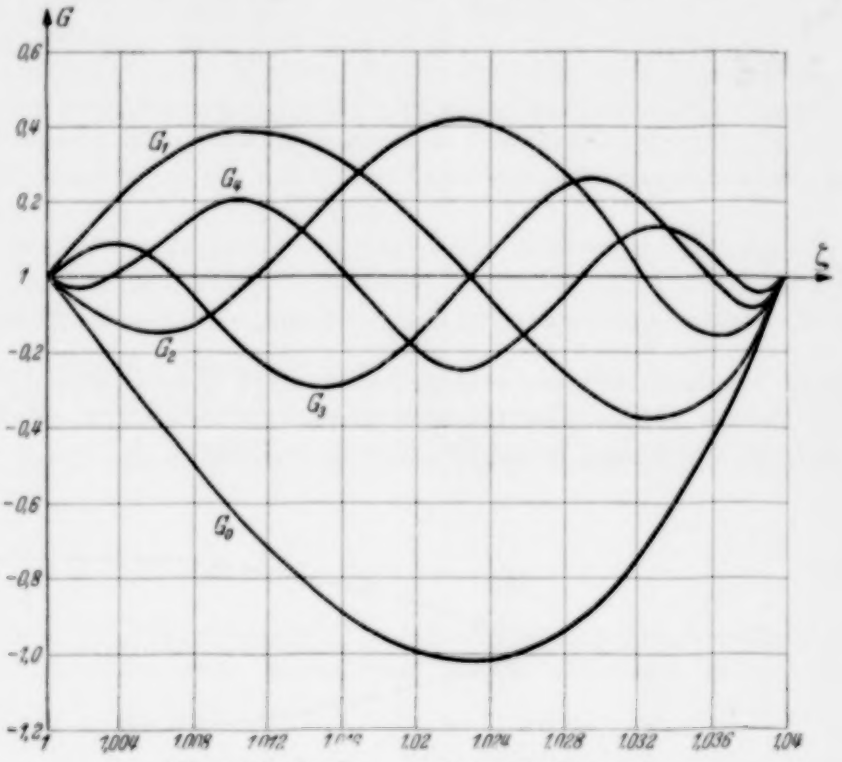


Abb. 4. Die der $R_2$ zugeordneten Funktionen $G$.

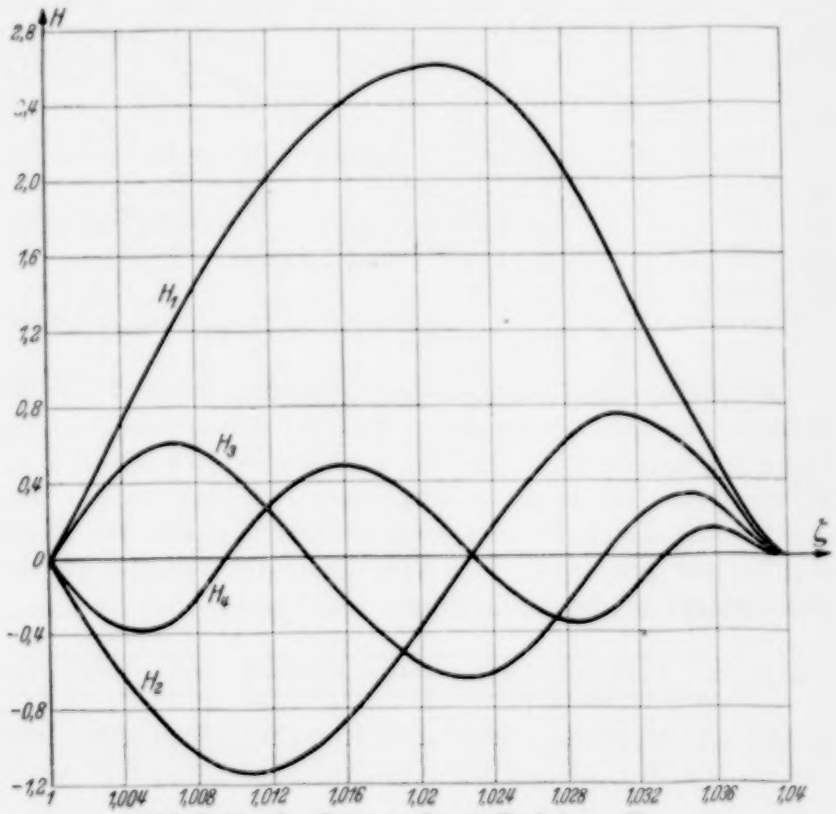


Abb. 5. Die der $R_2$ zugeordneten Funktionen $H$.

Um das Wesentliche des Verfahrens hervortreten zu lassen, beschränken wir uns auf vier geeignet gewählte Punkte der Meridiankurve, die zu den Werten $\zeta = 1{,}004;\ 1{,}008;\ 1{,}023;\ 1{,}036$ gehören. Mit Benutzung der Tabelle ergeben sich dann aus der Tangentialbedingung folgende vier Gleichungen zur Bestimmung der Größen $b'$

$$\left.\begin{aligned}
&0{,}8078\,b'_1 - 0{,}6756\,b'_2 \\
&\quad + 0{,}5122\,b'_3 - 0{,}3682\,b'_4 \\
&\quad = 0{,}0119\,, \\
&1{,}541\,b'_1 - 1{,}0805\,b'_2 \\
&\quad + 0{,}5561\,b'_3 - 0{,}172\,b'_4 \\
&\quad = 0{,}0469\,, \\
&2{,}509\,b'_1 + 0{,}0742\,b'_2 \\
&\quad - 0{,}6361\,b'_3 - 0{,}0485\,b'_4 \\
&\quad = 0{,}2256\,, \\
&0{,}6056\,b'_1 + 0{,}4668\,b'_2 \\
&\quad + 0{,}285\,b'_3 - 0{,}1472\,b'_4 \\
&\quad = 0{,}087\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Daraus berechnen sich die Werte

$$\left.\begin{aligned}
b'_1 &= 0{,}08814\,, & b'_2 &= 0{,}07830\,, & b'_3 &= -\,0{,}004198\,, & b'_4 &= 0{,}01163, \\
b_1 &= 0{,}04407\,, & b_2 &= 0{,}01605\,, & b_3 &= -\,0{,}0003498\,. & b_4 &= 0{,}000582.
\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Durch Multiplikation mit $v_2$ erhält man dann auch die Größen $B\beta_\nu$ und damit die vollständige Darstellung des Potentials.

Um nun die Reduktion auf die Form

$$F_{II}(t) = (1-t^2)\,[\gamma_1(t+1) + \gamma_2(t+1)^2 + \gamma_3(t+1)^3 + \gamma_4(t+1)^4] \tag{36}$$

durchzuführen, haben wir nach Tabelle 1 zu setzen

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \gamma_1 + \frac{6}{5}\gamma_2 + \frac{8}{5}\gamma_3 + \frac{16}{7}\gamma_4, \\ b_2 &= \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{2}{3}\gamma_2 + \frac{8}{7}\gamma_3 + \frac{40}{21}\gamma_4, \\ b_3 &= \frac{2}{15}\gamma_2 + \frac{2}{5}\gamma_3 + \frac{8}{9}\gamma_4, \\ b_4 &= \frac{2}{35}\gamma_3 + \frac{8}{35}\gamma_4. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Dann wird

$$\gamma_1 = 0{,}04971\,, \quad \gamma_2 = 0{,}0083\,, \quad \gamma_3 = -\,0{,}0208\,, \quad \gamma_4 = 0{,}00772\,.$$

Zum Vergleich mit der ersten Näherung $K(1-t^2)(t+1)$ müssen wir beide Funktionen auf die gleiche Fläche oder Gesamtergiebigkeit reduzieren. Man erhält dann, wie man durch eine einfache Rechnung feststellt, $K = b_1 = 0{,}0441$.

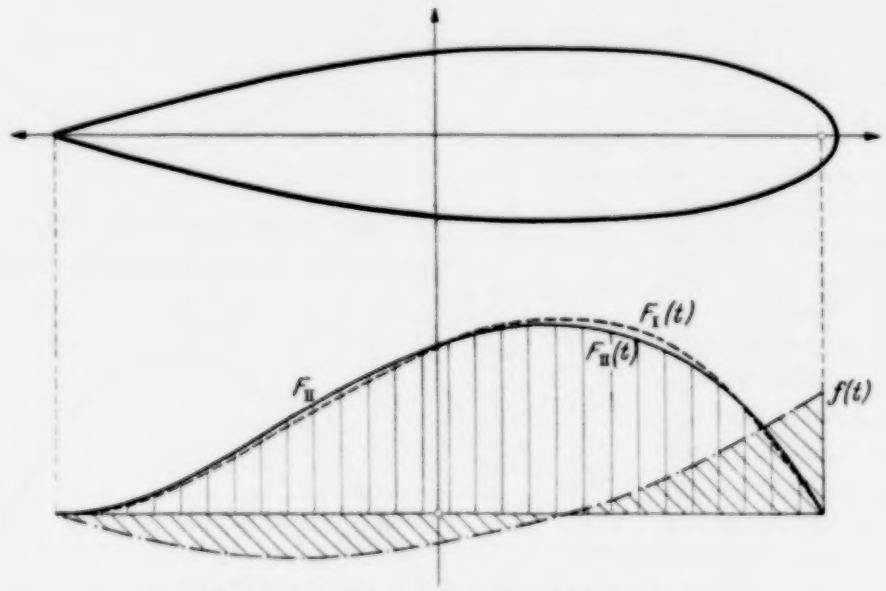


Abb. 6. Die Verteilungsfunktionen $f(t)$ und $F(t)$ der $R_2$.

Wir haben das Ergebnis der Rechnung in einer Tabelle und einer Zeichnung (Abb. 3) dargestellt, aus denen hervorgeht, daß die Abweichung der beiden Funktionen $F_I$ und $F_{II}$ voneinander höchstens 4 bis 5% des größten Wertes beträgt, so daß auch damit die Berechtigung, $F_I$ als erste Näherung zu betrachten, bestätigt wird. Es ist ohne weiteres verständlich, daß die Lösung durch Hinzunahme weiterer Punkte der Kontur beliebig verbessert werden kann, was bei entsprechender Vollständigkeit der Tabellen für die Kugelfunktionen keine wesentliche Schwierigkeiten bereiten würde.

| $t$ | —1 | —0,8 | —0,6 | —0,4 | —0,2 | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_I$ | 0 | 0,00319 | 0,0113 | 0,0223 | 0,0339 | 0,0441 | 0,0508 | 0,0515 | 0,0450 | 0,0286 | 0 |
| $F_{II}$ | 0 | 0,00310 | 0,0128 | 0,0247 | 0,0360 | 0,0448 | 0,0495 | 0,0490 | 0,0430 | 0,0293 | 0 |

Zusammenfassend ergibt sich also folgendes Ergebnis. Wenn $f(t)$ und das Streckungsverhältnis $A : \pi v_1$, ferner die Geschwindigkeit $v_1$ gegeben sind, so kann man unmittelbar $A$ und $a_\nu = A\alpha_\nu / 2\pi v_1$ bestimmen. Ferner ergibt sich aus $v_2$ und den Koeffizienten $b_\nu$ die Größe

$B\beta_\nu = 2\pi v_2 b_\nu$. Man hat z. B. mit $v_2 : v_1 = \operatorname{tg}\psi$

$$\frac{B\beta_\nu}{A\alpha_\nu} = \frac{b_\nu}{a_\nu}\operatorname{tg}\psi .$$

Damit sind dann alle Größen bekannt, welche für die vollständige Berechnung der aus der Längs- und Querbewegung entstehenden zusammengesetzten Strömung erforderlich sind.

**7. Die Differentialgleichung der Kontur** bei der Querströmung. Bei gegebener Dipolverteilung ist, wie ausgeführt, das System der Potentialflächen bekannt. Für die Relativströmung hat man

$$\Phi_2' = \frac{B}{2\pi}\cos\varphi \sum \beta_\nu P_\nu^1(\mu)\, Q_\nu^1(\zeta) - v_2\,\eta = \text{konst.} \tag{38}$$

Die Stromlinien sind räumlich doppelt gekrümmte Kurven, für die zunächst keine Darstellungsmöglichkeit vorhanden ist. Nur in der Meridianebene $\varphi = 0$ sind die Stromlinien in ihrem ganzen Verlauf ebene Kurven, und wenn in dieser Ebene die orthogonalen Trajektorien für das System der Potentialschnitte auffindbar ist, so ist damit auch der Meridianschnitt des Rotationskörpers als singuläre Stromlinie als bekannt anzusehen.

Wir können daher jedenfalls die Differentialgleichung für dieses Kurvensystem angeben. Zu diesem Zweck müssen wir die Bedingung für die Orthogonalität zweier sich im Punkte $\zeta\,\mu$ schneidender Kurven aufstellen. Die Tangentenrichtung in einem Punkt der Meridiankurve $R$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\zeta(1-\mu^2)\,\zeta' - \mu(\zeta^2-1)}{y(\zeta + \mu\,\zeta')}, \tag{39}$$

wenn $\frac{d\zeta}{d\mu} = \zeta'$ gesetzt wird. Daraus ergibt sich dann für zwei Richtungen $\zeta_1'$ und $\zeta_2'$ als Bedingung des Senkrecht-Stehens

$$(1-\mu^2)\,\zeta_1'\,\zeta_2' + \zeta^2 - 1 = 0\,, \qquad \zeta_1'\,\zeta_2' = -\frac{\zeta^2-1}{1-\mu^2}\,, \tag{40}$$

eine Beziehung, die leicht am System der Potential- und Stromlinien im achsensymmetrischen Fall der Längsströmung nachgeprüft werden kann. Wenn man nun die Gleichung (38) der Potentialschnitte in der $xy$-Ebene nach $\mu$ differentiiert, so ergibt sich mit $\frac{B}{2\pi v_2}\beta_\nu = b_\nu$

$$\zeta_1' = -\frac{\sum b_\nu \frac{dP_\nu^1}{d\mu} Q_\nu^1 + \mu\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{1-\mu^2}}}{\sum b_\nu P_\nu^1 \frac{dQ_\nu^1}{d\zeta} - \zeta\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\zeta^2-1}}}\,. \tag{41}$$

Dann gilt für die Orthogonalkurven, wenn wir statt $\zeta_2'$ wieder $\zeta'$ schreiben,

$$\zeta' = \frac{(\zeta^2-1)\sum b_\nu P_\nu^1 \frac{dQ_\nu^1}{d\zeta} - \zeta\, y}{(1-\mu^2)\sum b_\nu \frac{dP_\nu^1}{d\mu} Q_\nu^1 + \mu\, y} \tag{42}$$

oder bei Benutzung der Beziehungen $P_\nu^1 = P_\nu'\sqrt{1-\mu^2}$, $Q_\nu^1 = Q_\nu'\sqrt{\zeta^2-1}$ und

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1-\mu^2}\,\frac{dP_\nu^1}{d\mu} &= -\nu^2 P_\nu + P_{\nu-1}' = -\nu(\nu+1)P_\nu + \mu P_\nu', \\ \sqrt{\zeta^2-1}\,\frac{dQ_\nu^1}{d\zeta} &= \nu^2 Q_\nu - Q_{\nu-1}' = \nu(\nu+1)Q_\nu - \zeta Q_\nu' \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

für die auf die Kugelfunktionen $P_\nu$ und $Q_\nu$ reduzierte Form der Differentialgleichung

$$\sum b_\nu \nu(\nu+1)\frac{d}{d\mu}[P_\nu(\mu)\,Q_\nu(\zeta)] - \sum b_\nu P_\nu'(\mu)\,Q_\nu'(\zeta)\frac{d}{d\mu}(\zeta\,\mu) = \frac{d}{d\mu}(\zeta\,\mu)\,. \tag{44}$$

Für den Fall des aus dem einfachen Quellsenkenkeil ableitbaren Ellipsoids ist die Lösung leicht angebbar. Die auftretende Reihe beschränkt sich nämlich auf ein einziges Glied. Wir haben also

$$2\,b_1\frac{d}{d\mu}(\mu\,Q_1) - \frac{d}{d\mu}(\zeta\,\mu)\,[1 + b_1\,Q_1'] = 0\,. \tag{45}$$

Setzt man $b_1 Q_1' + 1 = C$, also $2 b_1 \mu Q_1 - \zeta \mu C = 0$,

so wird außer $\mu = 0$

$$2 b_1 Q_1 - b_1 \zeta Q_1 - \zeta = 0$$

und daher

$$b_1 = \frac{\zeta_0}{2 Q_1(\zeta_0) - \zeta_0 Q_1'(\zeta_0)}. \tag{46}$$

Benutzt man schließlich die Beziehungen

$$Q_1 = \frac{1 - \zeta Q_1'}{\zeta^2 - 1}, \quad Q_1' = -\frac{\overline{Q}_1}{\zeta^2 - 1}, \tag{47}$$

so folgt wieder wie oben

$$b_1 = \frac{\zeta_0^2 - 1}{\frac{2}{\zeta_0} - \overline{Q}_1(\zeta_0)}. \tag{48}$$

Auf die Konstruktion der Lösung der Differentialgleichung im allgemeinen Fall hoffe ich an anderer Stelle zurückzukommen.

(Eingegangen am 15. September 1951.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *W. Müller*, München 9, Taubenstr. 41.

D 57 275 4022 0,075 (K.B./Z. 040).

## Verstärker und Empfänger

Bearbeitet von Dr. techn. Dr.-Ing. eh. **M. J. O. Strutt,** ord. Prof. für theoretische Elektrotechnik an der eidgenössischen technischen Hochschule Zürich. (Lehrbuch der drahtlosen Nachrichtentechnik, herausgegeben von Nicolai v. Korshenewsky, Stockholm, und Wilhelm T. Runge, Berlin Bd. IV.) Zweite, verbesserte Auflage. Mit 425 Abbildungen. XV, 422 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 46.50

Aus den Besprechungen: .... Das vorliegende, in zweiter Auflage erscheinende Lehrbuch behandelt die grundlegenden physikalischen Eigenschaften sowie die Berechnung von Verstärkern und Empfängern. Gegenüber der ersten Auflage wurden verschiedene kleinere und größere Textänderungen vorgenommen. Dem Charakter eines Lehrbuches entsprechend, legte der Verfasser jedoch den größten Wert auf die eingehende Behandlung der Grundlagen ... Der vorliegende Band kann Studenten zur Einführung und dem praktisch tätigen Ingenieur als Nachschlagewerk bestens empfohlen werden.
*„Technische Mitteilungen"*

## Einführung in die theoretische Elektrotechnik. Von Dr.-Ing. E. h. Karl Küpfmüller,

Hon.-Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Vorstandsmitglied der Standard Elektr.-Ges. Vierte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 474 Abbildungen. V, 441 Seiten. 1952. Ganzleinen DM 27.60

... An Küpfmüllers Theoretischer Elektrotechnik schätzen wir Ingenieure, daß sie aus der Ingenieurtätigkeit heraus für die technische Anwendung geschrieben ist, um mit Hilfe der Theorie technische Aufgaben in Entwurf, Konstruktion und Herstellung mit einem Minimum an Aufwand zu lösen. Auch seine Auffassung Schwachstrom- und Starkstromtechnik einheitlich in gemeinsamer Sprache darzustellen, ist ein erfreulicher Fortschritt ...
*„Elektrotechnik und Maschinenbau"*

## Stromrichteranlagen der Starkstromtechnik. Einführung in Theorie und Praxis. Von Dr.-Ing. Helmut Anschütz. Mit 169 Abbildungen. VII, 213 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 18.—

Aus den Besprechungen: Die Technik der Stromrichter zur Umformung elektrischer Energie von einer Stromart in die andere hat sich im Laufe der letzten Jahre besonders auf dem Gebiete der Starkstromtechnik erheblich erweitert. Sie beginnt u. a. auch im Rahmen der Energieübertragung durch hochgespannten Gleichstrom vermehrte Bedeutung zu erhalten. Andererseits harren besonders auf diesem Gebiet noch viele Aufgaben der Lösung. Der Verfasser legt die sich daraus ergebenden Richtlinien in recht übersichtlicher und theoretisch gut fundierter Weise dar. Er gibt einleitend eine Übersicht über die verschiedenen Stromrichterarten und deren Aufgaben. In einem 2. Abschnitt gelangen die Gleichrichter, ihre Theorie und Berechnung bis in alle Details zur Darstellung. Ein weiteres Kapitel ist den Wechselrichtern zur Umformung des Gleichstromes in Wechsel- oder Drehstrom und die Umrichter zur Umformung von Wechsel- oder Drehstrom in solchen von anderer Frequenz gewidmet. Alsdann folgen die theoretischen Grundlagen und Erläuterungen zum Prüfen und Messen von Stromrichtern und Stromrichteranlagen. Weitere Abschnitte orientieren über die Schalt- und Schutzeinrichtungen sowie über die Projektierung von Stromrichteranlagen für die Starkstromtechnik. Einige speziell die Praktiker interessierende Angaben und Hinweise zur Anwendung des Stromrichters beschließen diesen wohlformulierten Beitrag; daraus seien erwähnt deren Gebrauch für Licht- und Kraftnetze, Bahnanlagen, für elektrochemische Werke, Sendeanlagen, Ladestationen für Akkumulatoren usw. Das Werk schließt ab mit einem Literatur-, einem Formel- und einem Sachverzeichnis.

Zum Verständnis dieses Buches sind gute Vorkenntnisse der gesamten Elektrotechnik notwendig; es hilft dem Studierenden und dem in der Praxis stehenden Ingenieur zum raschen und gründlichen Einarbeiten in das Spezialgebiet der Stromrichtertechnik und -theorie. Zu diesem Zwecke eignet es sich in hervorragender Weise und kann zur Anschaffung empfohlen werden.
*„Technische Rundschau"*

## Stahlmaste für Starkstrom-Freileitungen. Berechnung und Beispiele von Wilhelm Taenzer.

Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 264 Abbildungen. IV, 98 Seiten. 1952. DM 21.—

... Das vorliegende Werk, aus der Praxis und für sie geschrieben, bildet einen der bisher wertvollsten Beiträge zur Förderung wirtschaftlicher Stahlbauten und kann zur lohnenden Anschaffung als ebenso wertvolles Nachschlagewerk wie als unentbehrliches Rüstzeug zur Vertiefung in das Sondergebiet des Stahlmastenbaues und zur Schulung des technischen Nachwuchses angelegentlich empfohlen werden ...
*„Stahl und Eisen"*

---

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

**Maschinenelemente.** **Entwerfen, Berechnen und Gestalten im Maschinenbau.** Ein Lehr- und Arbeitsbuch. Von Dr.-Ing. **G. Niemann,** Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig.

Erster Band: **Grundlagen, Verbindungen, Lager, Wellen und Zubehör.**
Mit 795 Abbildungen. VIII, 308 Seiten. 1950. Ganzleinen DM 28.50

Aus den Besprechungen: Das Fehlen eines modernen Buches über Maschinenelemente wurde seit langem als empfindlicher Mangel empfunden. Das Erscheinen des 1. Bandes Niemann darf deshalb mit Freuden vermerkt werden um so mehr, als bereits der Name des Verfassers für die Güte des Werkes garantiert. Die Gliederung des Buches lehnt sich an die bekannte und übliche Einteilung an. Nach einer Einführung in die Methodik des Konstruierens werden Gestaltungsregeln, Festigkeitsrechnung und Werkstoffe behandelt, wobei dem so wichtigen Leichtbau ein besonderes Kapitel gewidmet ist. Von den eigentlichen Maschinenelementen werden im 1. Band besprochen: Verbindungselemente, Lager, Wellen und Achsen sowie die dazugehörigen Wellenverbindungen. Ein ausführliches Verzeichnis zu jedem Abschnitt verweist auf das gerade für dieses Gebiet manchmal sehr verstreute Schrifttum. Es darf als ein Vorteil des Buches angesehen werden, daß es nicht nur ein Lehrbuch ist sondern — von einem erfahrenen Praktiker geschrieben — auch stark auf die Bedürfnisse der Praxis abgestellt ist. Von irgendwelchen Ableitungen wurde nur sparsam Gebrauch gemacht und nur da, wo sie für das Verständnis unumgänglich nötig sind; dagegen werden die zahlreichen Erfahrungsangaben und Zahlenunterlagen dankbar aufgenommen werden. Daß bei dem umfangreichen Stoff manches nur kurz behandelt werden konnte, ist verständlich. Der unter diesem Zwang oft zum Telegrammstil gekürzte Text wird vom vielbeschäftigten Fachmann sicher begrüßt werden, wenn er auch dem Lernenden einige Schwierigkeiten bereiten kann. Diesem werden aber die zahlreichen, durchgerechneten Beispiele wieder das Eindringen in den Stoff erleichtern...

Das Buch kann als modernes Standardwerk der Maschinenelemente sowohl dem Studierenden als auch dem in der Praxis stehenden Ingenieur auf beste empfohlen werden. *„Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure."*

**Berechnung der Maschinenelemente.** Von Dipl.-Ing. **M. ten Bosch †,** Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. Dritte, ergänzte Auflage der „Vorlesungen über Maschinenelemente". Mit 926 Textabbildungen. X, 534 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 45.—

Aus den Besprechungen: Dieses moderne Lehrbuch der Maschinenelemente vermag auch dem Bauingenieur, insbesondere auf dem Gebiete des Stahlbaues, vielerlei Aufklärungen und Unterrichtung zu bieten, hat doch roh gerechnet etwa die Hälfte des Buches auch für ihn unmittelbar Bedeutung. Besonders die drei großen Kapitel: Angewandte Festigkeitslehre, Verbindungen und Wellen bilden wertvolle Ergänzungen zu den bekannten Fachbüchern der Bauingenieure, besonders wertvoll nicht zuletzt deshalb, weil viele Fragen von etwas anderem Gesichtspunkt aus betrachtet werden, als wir Bauingenieure dies gewohnt sind. Dieses Buch verdient auch von Bauingenieuren beachtet zu werden. Der Preis ist mäßig zu nennen in Hinsicht auf den großen Umfang und die vorzügliche Ausstattung des Buches. *„Der Bauingenieur."*

**Maschinenelemente.** **Leitfaden zur Berechnung und Konstruktion für Maschinenbauschulen und für die Praxis mittlerer Techniker.** Von Dipl.-Ing. **W. Tochtermann,** Professor an der Staatl. Ing.-Schule Eßlingen. Sechste, völlig neubearbeitete Auflage. Mit 641 Abbildungen. XII, 515 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 34.50

Aus den Besprechungen: Das völlig neubearbeitete und ausgezeichnet zusammengestellte Werk ist als Lehrbuch für technische Lehranstalten und als Handbuch für den in der Praxis stehenden Techniker bestimmt.

Der Verfasser stellt das Wesentliche der Ingenieurausbildung in den Vordergrund, nämlich die Maschinenelemente und die in ihnen ruhenden Probleme. Ihre Berechnung und zeichnerische Darstellung werden hier unter Weglassung veralteter Konstruktionen wirklich erschöpfend behandelt, wobei allerdings vorausgesetzt wird, daß der Studierende die Grundlagen der Mathematik, Mechanik und Festigkeitslehre beherrscht. Maschinenelemente bilden das Fundament jeder Konstruktion, der zukünftige Techniker muß sie richtig berechnen und gestalten können, nicht nur in bezug auf Sicherheit, sondern auch nach Gesichtspunkten rationeller Herstellung. Aus diesem Grunde legte der Autor bei der Neubearbeitung des Buches besonderen Wert auf eine Vielzahl aus der Praxis gegriffener Berechnungsbeispiele und auf eine Fülle aufschlußreicher Abbildungen, die das Gesagte klar und deutlich veranschaulichen...
*„Maschine und Werkzeug."*

**SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**

*Diesem Heft liegen 3 Beilagen des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.*

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. D 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040